Network for Studies on Pensions, Aging and Retirement

Notities behorend bij "Excel tool Waarderingskader"

Anne Balter
Tilburg University
9 april 2019

Introductie

Dit document beschrijft de berekening van de inkomensprofielen en de onzekerheid daarin van Bijlage 2 van het rapport "De bepaling van de marktwaarde van bestaande aanspraken in een uitkeringsovereenkomst"[1]. De berekeningen zijn uitgevoerd in een bijgevoegde Excel file.

Het rapport bestudeert een standaardmethode om bestaande aanspraken in een uitkeringsovereenkomst in te varen naar pensioenvermogens in een nieuw contract. Daartoe wordt (een deel van) het beschikbare fondsvermogen toegedeeld aan individuele deelnemers en, voor gepensioneerden, omgezet in een nieuwe uitkering conform de Wet Verbeterde Premieregeling (WVP). In de voorbeeldberekeningen in de bijbehorende Excel sheet gaan we uit van een constante rente r en, dus, vlakke termijnstructuur. Tevens zien we af van langlevenrisico en gebruiken een vaste sterftedatum van 87. De pensioenleeftijd zetten we op 67.

Het waarderingskader en vervolgens overgaan naar een WVP contract bestaat uit twee stappen die in het vervolg van deze notitie worden toegelicht:

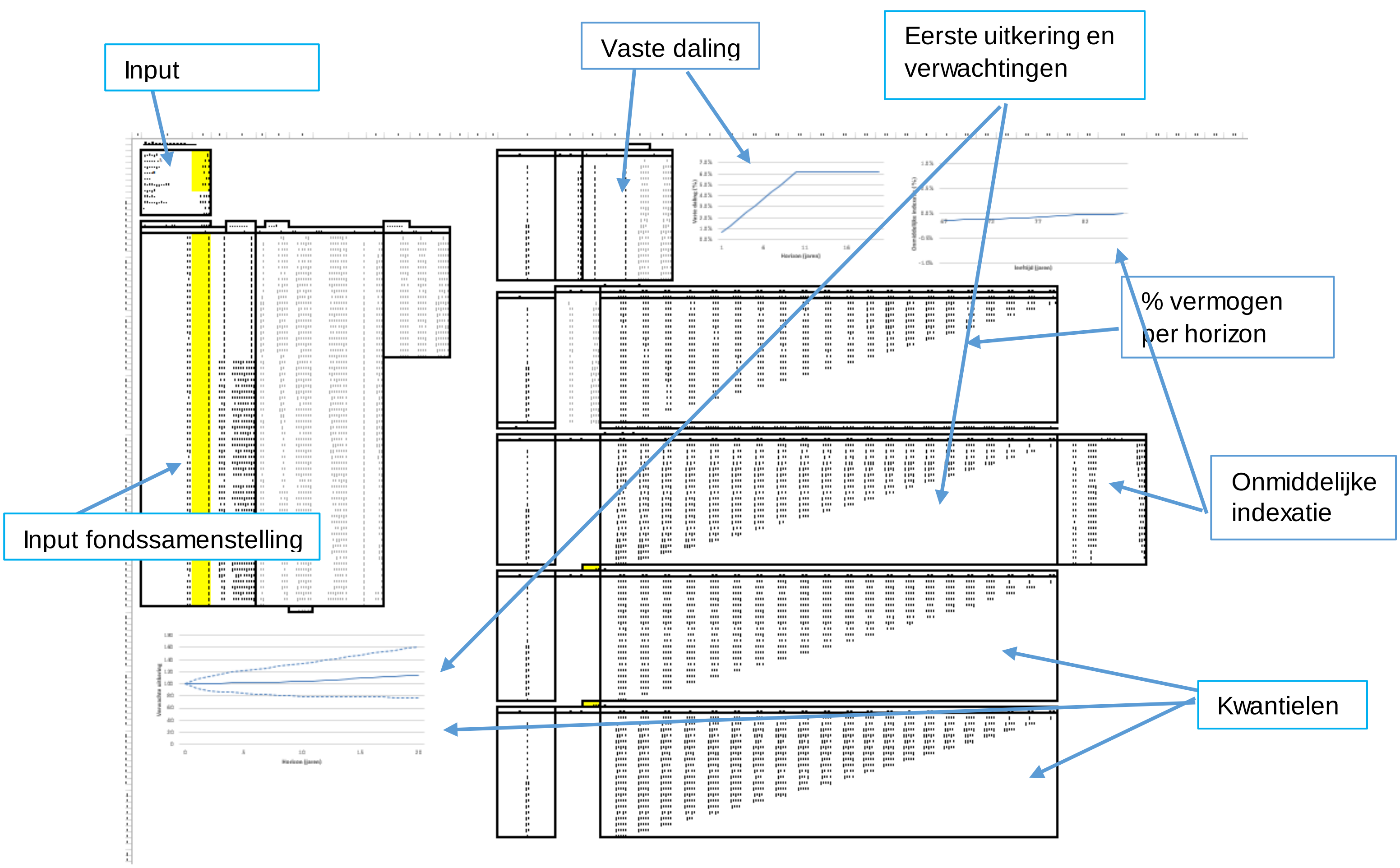
1. Uitvaren: Bepaal toedeling naar individuele vermogens
1.1 Bepaal, indien de dekkingsgraad afwijkt van 100%, een correctie op de individuele aanspraken om het dekkingstekort of -overschot toe te delen
1.2 Bepaal individueel toegedeelde vermogens
2. Invaren: Bepaal nieuwe uitkeringen op basis van individuele vermogens
2.1 Leeftijdsafhankelijke indexatie bij transitie en constante vaste daling
2.2 Uniforme indexatie en horizonafhankelijke vaste daling

In bijbehorend Excel tool wordt op basis van de fondssamenstelling, inclusief bijbehorende aanspraken en de dekkingsgraad het standaardmodel geïmplementeerd. Dit leidt tot individuele vermogens die vervolgens worden ingezet om een variabele annuïteit te kopen. Alle gele cellen in de tool dienen handmatig te worden ingesteld. Zie in Tabel 1 welke variabelen dit zijn. Vervolgens wordt in deze tool berekend wat onder additionele veronderstellingen de (verwachte) individuele pensioenuitkeringen zijn en wat de onzekerheid daarin is. De vaste daling die leidt tot uniforme indexatie voor alle leeftijden wordt afgeleid in paragraaf 2.2 en staat voorgeprogrammeerd in de tool. In Figuur 1 is een overzicht van de tool gepresenteerd.

[1] Werker, B., T. Nijman, M. Lever, T. Kocken, S. van Hoogdalem, L. Bovenberg, K. Bouwman, J. Bonenkamp, D. Boeijen en A. Balter, (2019). De bepaling van de marktwaarde van bestaande aanspraken in een uitkeringsovereenkomst, *Netspar Occasional Paper.*

	Symbool	Cel
Inputvariabelen:		
Spreidingshorizon	N	C3
Equity premium	$\mu - r$	C4
Exposure	w	C5
Volatiliteit	σ	C6
Risicovrije rente	r	C7
Dekkingsgraad	$F(0)$	C8
Opslag	b	C9
Kwantiel 1	α_1	T73
Kwantiel 2	α_2	T96
Fondssamenstelling (aantallen per leeftijd)	aantal dln	C17:C79
Outputvariabelen:		
Horizonafhankelijke vaste daling (per jaar)	$vd(h)$	X4:X24
Eerste uitkering	$W_0(0)$	U52:AO52
Verwachte uitkering	$E_0[W_h(h)]$	U53:AO72
Kwantiel α_1	$Q_0^{(\alpha_1)}[W_h(h)]$	U75:AO95
Kwantiel α_2	$Q_0^{(\alpha_2)}[W_h(h)]$	U98:AO118

Tabel 1: Excel input en output



Figuur 1: Excel tool

Network for Studies on Pensions, Aging and Retirement

1. Uitvaren

1.1 Toedeling dekkingstekort of -overschot: bepaling $x(t)$

We beschouwen een fonds met bestaande aanspraken A_l voor deelnemers van leeftijd l. De huidige (tijdstip 0) dekkingsgraad $F(0)$ leidt tot een procentuele over- of onderdekking in vermogen van $1 - F(0)$. Bij een gekozen spreidingsperiode van N jaar wordt $q(h)$ van de inkomensaanpassing meegenomen voor de aanspraak met horizon h. We modelleren dit volgens

$$q(h) = \left\{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \dots, 1, 1, 1 \dots\right\}$$

De procentuele lange termijn aansprakenaanpassing $x(0)$ leidt samen met $q(h)$ tot $q(h)x(0)$, de aansprakenaanpassing voor een horizon van h jaar. In het standaardmodel worden de aanspraken zodanig aangepast dat de contante waarde van alle verplichtingen gelijk is aan het vermogen van het fonds waarbij rekening wordt gehouden met de dekkingsgraad. De waarde van de verplichtingen voor deelnemers van leeftijd l na uitvaren is gelijk aan

$$PV_l^q(0) = \sum_{h=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} \frac{A_l * (1 - q(h)x(0))}{(1+r)^h}$$

waarbij de PL de pensioenleeftijd is (in het Excel bestand vastgezet op 67) en D de maximaal haalbare leeftijd (in Excel vast gezet op 87, merk ook op dat we sterftekansen niet expliciet meenemen). De lange termijn aansprakenaanpassing $x(0)$ wordt dusdanig gekozen dat het totaal aan verplichtingen gelijk is aan het toe te delen fondsvermogen.

Dus de dekkingsgraad is de ratio van de contante waarde van het vermogen (assets) en de verplichtingen (liabilities), waarbij de totale verplichtingen bestaat uit de som van alle aanspraken

$$F(0) = \frac{PV(0,A)}{PV(0,L)} = \frac{PV(0,A)}{\sum_{l=ML}^{D} PV_l^0(0)}$$

waarbij ML de minimum leeftijd van de deelnemers in het fonds is (in Excel vast gezet op 25 jaar). De som van alle nieuwe aanspraken is op basis van het budget constraint gelijk aan de totale waarde van alle assets, dit levert

$$\sum_{l=ML}^{D} PV_l^{qx}(0) = F(0) * \sum_{l=ML}^{D} PV_l^0(0)$$

waarbij $PV_l^0(0)$ de contante waarde van alle ongewijzigde aanspraken van de deelnemers met leeftijd l en $PV_l^{qx}(0)$ de contante waarde van alle aanspraken na uitvaren, en dus na het toepassen van de aansprakenaanpassing $q(h)x(0)$, van de deelnemers met leeftijd l.

Aangezien de aanspraken voor uitvaren gelijk zijn aan A_l en na aanpassing gecorrigeerd zijn met een factor $(1 - q(h)x(0))$, levert het invullen van de totalen aan contante waarde de volgende gelijkheid

$$\sum_{l=ML}^{D} \sum_{h=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} A_l * (1 - q(h)x(0))\exp(-hr) = F(0) * \sum_{l=ML}^{D} \sum_{h=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} A_l \exp(-hr)$$

Dit kunnen we oplossen voor de aansprakenaanpassing $x(0)$

$$x(0) = \frac{(1-F(0))\sum_{l=ML}^{D}\sum_{h=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} A_l \exp(-hr)}{\sum_{l=ML}^{D}\sum_{h=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} A_l q(h)\exp(-hr)}$$

Als we de variabele $\Lambda(0)$ die we aanduiden als de herstelcapaciteit van het fonds definiëren als

$$\Lambda(0) = \frac{\sum_{l=ML}^{D}\sum_{h=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} A_l q(h)\exp(-hr)}{\sum_{l=ML}^{D}\sum_{h=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} A_l \exp(-hr)}$$

dan volgt

$$x(0) = \frac{(1-F(0))}{\Lambda(0)}$$

De aanspraken zijn gelijk aan 100 voor alle gepensioneerden, $A_l = 100, l \in (67,..,87)$ en voor de werkende is een opbouw factor van $\frac{1}{42}$e per jaar verondersteld leidend tot $A_l = \frac{l-25}{42}100, l \in (25,\ldots,66)$. Het aantal deelnemers per leeftijd is een van de variabele die kan worden ingesteld in bijbehorend Excel tool.

1.2 Bepaling individuele vermogens

Gegeven de waarde van $x(0)$, dat volgt uit het toe te delen vermogen van het fonds, is het individuele vermogen van een deelnemer met leeftijd l na uitvaren gelijk aan

$$PV_l^{qx}(0) = \sum_{h=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} A_l(1-q(h)x(0))\exp(-hr)$$

2. Invaren in WVP

We nemen aan dat het individuele vermogen $PV_l^{qx}(0)$ zoals bepaald in paragraaf 1.2 gebruikt wordt om een nieuwe (variabele) uitkering conform WVP in te kopen. Hierbij wordt gebruikt gemaakt van een (mogelijk horizonafhankelijke) vaste daling $vd(h)$.

Gegeven de dekkingsgraad kan worden berekend welke vaste daling moet worden ingezet om zonder dat sprake is van herverdeling van vermogen een eerste uitkering te verkrijgen die gelijk is aan de aanspraak voor uitvaren, $W_0(0) = A_l$. De uitkering volgend uit de variabele annuïteit kan zo ontworpen worden dat in het uitkeringscollectief de vaste daling zodanig wordt gekozen dat voor alle leeftijden boven de pensioenleeftijd de eerstvolgende uitkering gelijk is aan de huidige uitkering voor invaren, of geïndexeerd met een zelfde hoeveelheid. Dit levert een horizonafhankelijke vaste daling. Een constante (leeftijdsafhankelijke) vaste daling kan numeriek worden afgeleid zodanig dat voor een gegeven leeftijd de eerste uitkering van gewenste hoogte is.

Voor een vaste daling inclusief risicovrije rente $a_0(h) = vd(h) + r$ is $W_0(h)$ het vermogen dat wordt gereserveerd voor periode h op tijdstip 0

$$\frac{W_0(h)}{W_0} = \frac{W_0(h)}{\sum_{k=\max(65-l,0)}^{\min(85-l,85)} W_0(k)} = \frac{\exp(-h * a_0(h))}{\sum_{k=\max(65-l,0)}^{\min(85-l,85)} \exp(-k * a_0(k))}$$

De eerste uitkering is $W_0(0)$. Voor de details behorend bij de berekeningen van de variabele annuïteit conform WVP, zie Balter en Werker (2017)[2].

[2] Balter, A. G. en B. J. M. Werker (2017). The Effect of the Assumed Interest Rate and Smoothing on Variable Annuities, *Netspar Design Paper*.

2.1 Leeftijdsafhankelijke indexatie bij transitie en constante vaste daling

Voor een gegeven dekkingsgraad $F(0)$ wordt de korting $x(0)$ bepaald, vervolgens wordt op basis daarvan de nieuwe waarde van het vermogen afgeleid en een variabele annuïteit aangekocht. De projectierente wordt zodanig (numeriek) gekozen dat de eerst uitkering voor een individu met leeftijd l gelijk is aan de aanspraak voor uitvaren.

$$W_0(0) = A_l$$

Er is dus (uiteraard) los van eventuele restrictie op maximale vaste daling vanuit de regelgeving een constante vaste daling te vinden die de eerste uitkering gelijk maakt aan de aanspraak. De hoogte van die in te rekenen vaste daling verschilt per leeftijd. Merk dus op dat restrictie tot een leeftijdsonafhankelijke constante vaste daling leidt tot een leeftijdsafhankelijke inkomenssprong bij transitie voor iedere initiële dekkingsgraad ongelijk aan 100%. Bij een initiële dekkingsgraad van 100% zal een leeftijdsonafhankelijke vaste daling die afwijkt van 0% ook een leeftijdsafhankelijke inkomenssprong bij de transitie veroorzaken.

2.2 Uniforme indexatie en horizonafhankelijke vaste daling

Het is ook mogelijk de vaste daling zo te kiezen dat voor alle leeftijden ongeacht de dekkingsgraad[3] de eerste uitkering gelijk is aan de aanspraak en ook in latere jaren uniform wordt geïndexeerd. Deze vaste daling is horizonafhankelijk en kan als volgt worden gevonden: voor een gegeven dekkingsgraad $F(0)$ wordt de korting $x(0)$ bepaald, vervolgens wordt op basis daarvan de nieuwe waarde van het vermogen afgeleid en een variabele annuïteit aangekocht. We kiezen de vaste daling zodanig dat de eerst uitkering voor een individu gelijk is aan de aanspraak voor uitvaren voor *iedere* leeftijd l

$$W_0(0) = A_l$$

Aangezien W_0 het totale vermogen is, volgt hieruit

$$W_0 = PV_l^{qx}(0) = \sum_{p=PL-l}^{D-l} A_l * (1 - q(p)x(0))\exp(-pr)$$

Bij benadering leidt $a_0(h) = r + \frac{1}{h}q(h)x(0)$ tot $W_0(0) \approx A_l$ voor $PL \leq l \leq D$, waarbij het vermogen gedefinieerd is via $W_0(h) = W_0 \frac{\exp(-h*a_0(h))}{\sum_{k=PL-l}^{D-l}\exp(-k*a_0(k))}$. De benadering die gebruikt is, is $(1 - q(h)x(0)) \approx \exp(-q(h)x(0))$. De Excel gaat uit van de vaste daling waarbij de gelijkheid exact is[4]

$$a_0(h) = r - \frac{1}{h}\ln\big(1 - q(h)x(0)\big)$$

Voor $h = 0$ levert het invullen van W_0 het volgende resultaat,

$$\sum_{p=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} A_l * (1 - q(p)x(0))\exp(-pr)\frac{\exp(-0*r + \ln(1))}{\sum_{k=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)}\exp\big(-k*r + \ln(1 - q(k)x(0))\big)} = A_l$$

[3] Hier wordt afgezien van wettelijke restricties op de maximale vaste daling, zie later.

[4] Merk op dat, zoals eerder is afgeleid, de lange termijn korting $x(0)$ volgt uit de leeftijdssamenstelling van het fonds en de initiële dekkingsgraad: $x(0) = (1 - F(0))/\Lambda(0)$.

waarbij $q(0) = 0$, aangezien de gelijke sommaties tegen elkaar kunnen worden weggestreept. Dit geldt voor iedere leeftijd $PL \leq l \leq D$. Hierdoor is de eerste uitkering exact gelijk aan A_l.

Denkbaar is ook dat men, zonder herverdeling, bij de eerste uitkering indexatie wil bieden aan alle generaties met uitzondering van de alleroudsten zodat

$$W_0(0) = A_l \exp(b)$$

voor iedere leeftijd $l = 1, \ldots, D-1$. Dit kan bereikt worden door een horizonafhankelijke vaste dalingsaanpassing $y(h)$. Deze recursieve[5] formule is

$$y(i) = \frac{\ln\left(\sum_{p=0}^{i}(1 - q(p)\,x(0))\exp(-p\,r - b) - \sum_{p=0}^{i-1}(1 - q(p)\,x(0)\,y(p))\exp(-p\,r)\right) + i\,r}{\ln(1 - q(i)\,x(0))}$$

Let op dat ook hier de wettelijke restrictie op de maximale vaste daling hierin niet expliciet is meegenomen en dus apart gecheckt dient te worden. De herverdeling door ook de oudste generatie op dezelfde manier te indexeren zal weer beperkt zijn. Een zelfde aanpak kan natuurlijk ook gebruikt worden door enige herverdeling naar meer oudere generaties toe te staan hetgeen tot meer initiële uniforme indexatieruimte leidt.

Bewijs;

Het totale vermogen W_0 is $W_0 = PV_l^{qx}(0) = \sum_{p=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} A_l * (1 - q(p)x(0))\exp(-pr)$ en het vermogen dat wordt gereserveerd voor periode h is gedefinieerd via $W_0(h) = W_0 \frac{\exp(-h\,a_0(h))}{\sum_{k=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} \exp(-k\,a_0(k))}$

Indien[6]

$$a_0(h) = r - \frac{1}{h}\ln\left(1 - q(h)\,x(0)\right)y(h)$$

en als $h = 0$, dan levert het invullen van W_0 de volgende vergelijking die we gelijk zetten aan de geïndexeerde aanspraak $A_l \exp(b)$

$$A_l \sum_{p=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} \left(1 - q(p)x(0)\right)\exp(-pr) \frac{\exp(-0 * r + \ln(1 - q(0)\,x(0))y(0))}{\sum_{k=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} \exp\left(-k\,r + \ln\left(1 - q(k)x(0)\right)y(k)\right)} = A_l \exp(b)$$

$$\frac{\sum_{p=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} \left(1 - q(p)\,x(0)\right)}{\sum_{p=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} \left(1 - q(p)\,x(0)\right)^{y(p)}} = \exp(b)$$

Dit impliceert de recursieve formule voor $y(h)$. □

[5] Uit de conditie voor $l = D - i$ volgt $y(i)$ gegeven $y(i-1), \ldots, y(1)$ dus begin recursief bij $l = D - 1$.

[6] De projectierente is wettelijk gemaximaliseerd op $\max(a_0(h)) = r + \min(w(h)\lambda\sigma, 35\%\lambda\sigma)$.

3. Ontwikkeling vervolguitkeringen

In paragraaf 2 hebben we de eerste uitkering bepaald na invaren in WVP. In deze paragraaf bepalen we vervolgens de dynamiek van de vervolguitkeringen.

De verwachte uitkeringen volgen

$$E_0[W_h(h)] = W_0(h)\exp\left(h(r + w\lambda\sigma)\right)$$

Aangezien het risicovolle aandeel zich ontwikkelt als een geometrische Brownian motion, waarbij λ de Sharpe ratio is, w het percentage van vermogen dat belegd wordt in risicovolle aandelen, dus de risico exposure, en μ is het verwacht rendement op aandelen en σ de volatiliteit, dus $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$. In Excel is excess return gemodelleerd, $\mu - r$, dus $w\lambda\sigma = w(\mu - r)$.

Voor de gekozen vaste daling zodanig dat de eerste aanspraak gelijk blijft aan de aanspraak voor uitvaren leidt tot de volgende verwachte uitkeringen bij een constant beleggingsrisico w en $a_0(h) = r - \frac{1}{h}\ln\left(1 - q(h)x(0)\right)$ tot

$$\begin{aligned}
E_0[W_h(h)] &= W_0(h)\exp\left(h(r + w\lambda\sigma)\right) \\
&= \sum_{p=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} A_l * \left(1 - q(p)x(0)\right)\exp(-pr)\frac{\exp\left(-h * \left(a_0(h) - (r + w\lambda\sigma)\right)\right)}{\sum_{k=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} \exp\left(-k * a_0(k)\right)} \\
&= \sum_{p=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} A_l * \left(1 - q(p)x(0)\right)\exp(-pr)\frac{\exp\left(-h * \left(-\frac{1}{h}\ln\left(1 - q(h)x(0)\right) - w\lambda\sigma\right)\right)}{\sum_{k=\max(PL-l,0)}^{\min(D-l,D)} \exp\left(-k * \left(r - \frac{1}{k}\ln\left(1 - q(k)x(0)\right)\right)\right)} \\
&= A_l\exp\left(\ln\left(1 - q(h)x(0)\right) + hw\lambda\sigma\right) \\
&= A_l\left(1 - q(h)x(0)\right)\exp(hw\lambda\sigma)
\end{aligned}$$

waarbij in de laatste stap de definitie van $a_0(h)$ is gebruikt (anders gezegd: omdat de vaste daling zodanig is gekozen dat de breuk van de twee sommen gelijk is aan 1).

Het α-kwantiel voor de uitkering op tijdstip h is gelijk aan

$$\begin{aligned}
Q_0^{(\alpha)}[W_h(h)] &= W_0(h)\exp\left(h\left(r + w\lambda\sigma - \frac{1}{2}w^2\sigma^2\right) + z_\alpha\sqrt{h}w\sigma\right) \\
&= A_l\,(1 - q(h)x(0))\exp\left(hw\lambda\sigma - \frac{1}{2}hw^2\sigma^2 + z_\alpha\sqrt{h}w\sigma\right)
\end{aligned}$$