Network for Studies on Pensions, Aging and Retirement

Netspar OCCASIONAL PAPERS

Theo Nijman en Bas Werker

Marktconsistente Waardering van Zachte (Reëele) Pensioencontracten

Marktconsistente Waardering van Zachte (Reële) Pensioencontracten

Theo E. Nijman en Bas J.M. Werker*
Netspar en Universiteit van Tilburg

Voorlopige versie: commentaar welkom

September 6, 2011

Dit document beschrijft marktconsistente waardering van zacht (reële) pensioencontracten zoals die in de uitwerkingsovereenkomst bij het pensioenakkoord worden voorgesteld. Aangetoond wordt dat, indien toe- en afslagen worden verleend door schokken in de marktconsistente dekkingsgraad uit te smeren over een aantal jaren, de marktconsistente disconteringsvoet afhangt van de horizon van de pensioentoezegging. Ook worden resultaten afgeleid voor verdelingsmechanismen gebaseerd op niet marktconforme waardering van de verplichtingen, bijvoorbeeld door risicoloos te disconteren of door te disconteren tegen het verwacht portefeuillerendement.

De horizon afhankelijke marktconsistente disconteringsvoet ligt tussen de (reële) risicovrije rente en het verwacht (reëel) portefeuillerendement. Deze disconteringsvoet is van belang voor het bepalen van de dekkingsgraad van een fonds en dus voor de beoordeling of financiële ruimte bestaat voor het toekennen van toeslagen, danwel dat afslagen vereist zijn. De disconteringscurve speelt ook een grote rol bij de bepaling van de kostendekkende premie voor nieuwe opbouw en bij waardeoverdracht. Als schokken in financiële markten binnen 10 jaar moeten zijn geabsorbeerd, zoals het pensioenakkoord lijkt te veronderstellen, volgt bij een duration van de verplichtingen van 15 jaar dat grofweg 70% van de risicopremie in de onderliggende beleggingsportefeuille bij marktconsistente waardering van de totale verplichtingen kan worden meegenomen. Daarmee leidt marktconsistente waardering van de verplichtingen tot een endogene grootte van de reserve die de laatste deelnemers precies compenseert voor het feit dat zij geen schokken meer gedeeltelijk kunnen doorschuiven naar volgende generaties. De grootte van deze reserve neemt af naar mate het fonds minder risico neemt.

*Bas Werker is eveneens als research fellow verbonden aan de Duisenberg School of Finance

1 Samenvatting

In dit document bespreken we marktconforme waardering van pensioenrechten in collectieve contracten waarin schokken in financiële markten en in sterftekansen over meerdere perioden worden uitgesmeerd. Als er geen sprake is van uitsmeren van deze schokken is de marktconforme disconteringsvoet gelijk aan het verwacht portefeuillerendement. Als schokken wel worden uitgesmeerd verschilt de mate van risico die gelopen wordt met de horizon van de verplichting. Het verevenen van schokken leidt er dan toe dat niet de gehele risicopremie op de onderliggende beleggingsportefeuille meegenomen mag worden in de waardering van de verplichtingen. We beperken ons dit document tot invullingen van het StAR akkoord waarin toe- of afslagen berekend worden als $\left(S_t - \bar{S}\right)/N$ met S_t de huidige "dekkingsgraad", $\bar{S}$ een streefwaarde voor deze dekkingsgraad, en N een vereveningsparameter. Onze berekeningen tonen aan dat voor een fonds met een duration van de verplichtingen van 15 jaar dat jaarlijks 10% van een achterstand in dekkingsgraad absorbeert ($N = 10$) ongeveer de helft van de aandelenrisicopremie ingeboekt mag worden bij het bepalen van de waarde van de totale verplichtingen. Indien schokken sneller worden toegedeeld en jaarlijks 20% van een achterstand in dekkingsgraad wordt genomen ($N = 5$) stijgt dit percentage tot ongeveer 70%.

Marktconsistente waardering van financiële titels kan gebeuren volgens ten minste drie equivalente methoden: risiconeutraal waarderen, disconteren van verwachte uitbetalingen tegen een marktconsistente disconteringsvoet en het hanteren van een "pricing kernel" of "stochastic discount factor" (zie Cochrane, 2005). De waardering is ongeacht de gebruikte techniek gebaseerd op modelaannames betreffende de onderliggende risicofactoren. Voor veel financiële producten is het ook onvermijdelijk om subjectieve aannames te maken over niet direct waarneembare parameters zoals de risicopremie op aandelen of de correlatie tussen rendementen op verschillende financiële waarden. Dat is ook bij de waardering van de zachte reële pensioencontracten het geval.

Onze analyse leidt tot een analytische uidrukking voor de waardering van verplichtingen in zachte reële pensioencontracten onder veronderstellingen die direct aansluiten bij die van de Black Scholes formule voor het waarderen van opties op aandelen en gangbare duration modellen voor het omgaan met renterisico. De toezichthouder zou het gebruik van de waarderingsmethode kunnen vereenvoudigen door een applicatie aan te bieden die de juiste disconteringscurve bepaalt uit de input parameters. Het principe van een horizon afhankelijke disconteringsvoet geldt ook voor andere mogelijke invullingen van het StAR akkoord dan het contract dat hier wordt onderzocht. In die gevallen kan eventueel worden teruggevallen op numerieke bepaling van de juiste disconteringscurve, ook wel aangeduid als Value Based ALM.

Als alleen sprake is van aandelenrisico vereenvoudigen de uitdrukkingen voor de disconteringscurve aanzienlijk. De op basis van rekenkundige rendementen gemeten disconteringsvoet op horizon h voor de verwachte pensioenbetalingen kan in dat geval worden geschreven als

$$\mu(h) = r + w\eta_S\sigma_e \left[1 - \frac{1-\rho^h}{h(1-\rho)}\right], \quad (1)$$

met r de risico-vrije (reële) rente, w de aandelenexposure van de beleggingsportefeuille van het fonds, $\eta_S\sigma_e$ de risicopremie op aandelen in de financiële markt, σ_e de volatiliteit van aandelen en $\rho = 1 - 1/N$. De gevonden grootte van de marktconforme risicopremie is eenvoudig te motiveren. Dit paper gaat uit van een situatie dat de pensioenen in jaar t vastliggen en gebaseerd worden op de dekkingsgraad aan het einde van jaar $t-1$. Dit betekent dat pensioenbetalingen op een horizon van $h = 1$ jaar geen risicoexposure hebben. Pensioenbetalingen met een horizon van $h = 2$ jaar hebben geen exposure naar schokken in jaar $t+2$, maar een exposure van $1-\rho = 1/N$ naar schokken in het eerste jaar. Voor $h = 3$ vinden we een exposure van $1-\rho^2$ naar schokken in het eerste jaar en $1-\rho$ naar schokken in het tweede jaar. In het algemeen is de gemiddelde exposure voor een horizon h naar schokken dus gelijk aan $h^{-1}\sum_{i=0}^{h-1}(1-\rho^i)$. Deze som uitwerken levert de gegeven expressie voor de discontovoet. Direct valt in te zien dat als h gelijk is aan 1 de disconteringsvoet gelijk is aan de (reële) risicovrije rente. Voor lange horizon (grote h) tendeert de disconteringsvoet naar het verwacht rendement op de beleggingsportefeuille. Merk op dat voor $N = 1$ geldt dat $\rho = 0$ en de discontovoet gegeven wordt door $r + w\eta_S\sigma_e(1 - 1/h)$.

In bovenstaande interpretatie van het pensioenakkoord is verondersteld dat rendementsschokken pas na een jaar tot daadwerkelijke aanpassing van de pensioenen leiden. In Bovenberg en Nijman (2011) wordt verondersteld dat de aanpassing onmiddelijk plaatsvindt waardoor de licht hogere discontovoet

$$\mu(h) = r + w\eta_S\sigma_e \left[1 - \rho\frac{1-\rho^h}{h(1-\rho)}\right], \quad (2)$$

geldt. Voor $N = 1$ geldt dan $\rho = 0$ en $\mu(h) = r + w\eta_S\sigma_e$ zodat de gehele risicopremie op aandelen gebruikt moet worden voor de waardering van verplichtingen omdat de pensioenbetalingen in die situatie volledig en direct risicodragend zijn. Deze timing effecten spelen uiteraard ook bij het toekennen van inflatiecompensatie en laten we verder op dit moment buiten beschouwing.

Wij laten zien dat de dynamiek van de marktconforme dekkingsgraad wordt gegeven door

$$\log\frac{S_{t+1}}{\bar{S}} - \mu = \rho\left(\log\frac{S_t}{\bar{S}} - \mu\right) + we_{t+1}, \quad (3)$$

$$\mu = Nw\eta_S\sigma_e\frac{1-\rho^{D_V}}{D_V(1-\rho)}, \quad (4)$$

met e_{t+1} het excess rendement op aandelen en D_V de duration van de verplichtingen[1]. Het niet toedelen van de gehele risicopremie leidt ertoe dat op

[1] Wederom is deze formule aangepast voor het gebruik van rekenkundige rendementen ten opzichte van de meetkundige rendementen in de rest van dit artikel.

termijn een reserve in het fonds ontstaat. Indien een marktconforme disconteringsvoet gekozen is, dan zal de positieve verwachting van deze reserve ook precies marktconform zijn. Indien het fonds minder risico neemt, zal de verwachte grootte van deze reserve ook afnemen.

2 Het nieuwe pensioencontract

In het nieuwe pensioencontract zoals overeengekomen door sociale partners worden (financiële en demografische) schokken toegedeeld aan de deelnemers in een pensioenfonds. In dit contract speelt de dekkingsgraad een centrale rol. Deze dekkingsgraad wordt enerzijds gebruikt als stuurvariabele (ten behoeve van de jaarlijkse aanpassing van opgebouwde rechten) en anderzijds om de financiele situatie van het pensioenfonds samen te vatten en, mogelijk, toezicht te houden. Beide interpretaties staan los van elkaar, doch worden vaak vereenzelvigd. In dit document hanteren we de terminologie dekkingsgraad slechts indien deze gebaseerd is op een marktconforme waardering van de verplichtingen. We laten de mogelijkheid open dat indexatie wordt verleend op basis van een stuurvariabele die niet gelijk is aan de dekkingsgraad. Dit is bijvoorbeeld het geval indien verplichtingen worden verdisconteerd met het volledige verwachte rendement op de beleggingsportefeuille of, anderszijds, met slechts de risicovrije rente. We spreken dan consequent van *veronderstelde* waarde van de verplichtingen.

We geven met Z_{ti} de totaal opgebouwde rechten, op tijdstip t, aan van de deelnemers die over i jaar met pensioen gaan. Voor $i \leq 0$ zijn het de rechten van deelnemers die al $-i$ jaar met pensioen zijn. Voor deze laatste groep is Z_{ti} dus precies gelijk aan de pensioenbetaling die zij in jaar t ontvangen. De totale pensioenbetaling van het fonds aan gepensioneerden, in jaar t, wordt met deze notatie dus gegeven door $\sum_{i \leq 0} Z_{ti}$. Voor groepen die nog niet gepensioneerd zijn, geeft Z_{ti} het niveau van het te ontvangen pensioen aan, in geval er geen enkele toekomstige aanpassing meer zou volgen.

Kern van het nieuwe pensioencontract is dat elk jaar de opgebouwde rechten verhoogd of verlaagd worden naar gelang de 'financiele situatie' van het fonds. We geven de toe te kennen aanpassing (toe- of afslag) in jaar t aan met y_t. In dit gehele document maken we gebruik van meetkundige verdiscontering. De ontwikkeling van de opgebouwde rechten wordt dan gegeven door

$$Z_{t+1,i} = \exp\left(y_t\right) Z_{t,i+1}. \tag{5}$$

We nemen aan dat de pensioenaanpassingen y_t afhankelijk zijn van een stuurvariabele die we aangeven met S_t. Concreet beschouwen wij het mechanisme

$$y_t = \frac{1}{N} \log\left(S_t/\bar{S}\right) \approx \frac{1}{N}\left(S_t - \bar{S}\right).$$

Hierin is N een vereveningsparameter en $\bar{S}$ een streefwaarde voor de stuurvariabele waarboven pensioenen verhoogd zullen worden en waaronder deze verlaagd worden. Als bijvoorbeeld $N = 5$ wordt jaarlijks 20% van de resterende achterstand ten opzichte van de streefwaarde van de stuurvariabele geabsorbeerd in de toe- of afslag. Het pensioenakkoord laat meer mogelijke invullingen toe. Bovenstaande aanname leidt ertoe dat de ontwikkeling van de stuurvariabele valt binnen de klasse van (lineaire) AR(1) processen. Hierdoor zijn analytische berekeningen, met de bijbehorende inzichten, mogelijk. Andere aanpassingsmechamismen kunnen door middel van simulatie geanalyseerd worden. Merk op dat bovenstaande formule niet expliciet rekening houdt met inflatie. Alle (waarde)grootheden in dit document kunnen zowel nominaal als reëel geïnterpreteerd worden.

We beperken ons in deze notitie tot stuurvariabelen die verkregen worden door de opgebouwde rechten te verdisconteren met enige discontovoet. Merk op dat deze stuurvariabele slechts dan gelijk is aan de marktconforme dekkingsgraad indien deze discontovoet gelijk is aan de marktconforme discontovoet van de beloofde pensioenbetalingen, rekening houdend met de onzekerheid daarin. Er is veel discussie in de landelijke dagbladen over 'de juiste' keuze van deze discontovoet. Hierbij komen voorstellen varierend van de risicovrije rente tot het onderliggende portefeuille rendement voorbij. Wij tonen aan dat de marktconforme disconteringsvoet horizon afhankelijk is en brengen de consequenties in beeld van het hanteren van afwijkende disconteringsvoeten. We onderzoeken daarom als *veronderstelde* disconteringsvoet, op tijdstip t en horizon h,

$$\theta_t\left(h\right) = \theta_0 r_t + \theta_1 + \theta_2(h, N), \tag{6}$$

waarin r_t de korte rente aangeeft. De keuze $\theta_0 = 0$ en $\theta_2(h, N) = 0$ leidt tot het gebruik van constante discontovoeten ter grootte van θ_1. Wij veronderstellen dat de termijnpremie slechts een functie is van de looptijd. De keuze $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0$ en $\theta_1(h, N) = \theta_1(h)$ maakt daarmee het gebruik van de rentetermijnstructuur zonder enige risico opslag mogelijk. Het toevoegen van risicopremies kan door deze in θ_1 op te nemen, of als ze afhangen van de horizon en/of de vereveningsparameter N, in $\theta_2(h, N)$. Ter identificatie zullen we later soms opleggen dat $\theta_2(D_V, N) = 0$, waarbij D_V de duration van de verplichtingen is. Verderop in dit paper laten we zien voor welke parameter keuzen bovenstaande discontovoeten marktconform zijn. Indien de discontovoeten niet marktconform zijn bepaald, bijvoorbeeld door ze gelijk te stellen aan het constante verwachte portefeuillerendement, zullen we consequent spreken van *veronderstelde* discontovoeten, leidend tot een *veronderstelde* waarde van de verplichtingen (aan te duiden met V_t).

De stuurvariabele S_t wordt nu verkregen door de marktwaarde van de activa, aangeduid met A_t, te delen door deze veronderstelde waarde van de verplichtingen V_t. Deze veronderstelde waarde van de verplichtingen wordt bepaald door de toekomstige pensioenuitbetalingen te verdisconteren met de veronderstelde discontovoeten. Hierbij houden we rekening met (stochastiek in de) sterftekansen. Definieer hiertoe $p_t^{i:h}$ als de overlevingskansen, op tijdstip t, van cohort i over een horizon van h jaar. Daarmee wordt de stuurvariabele gegeven door

$$S_t = \frac{A_t}{\sum_{h \geq 0} \exp\left(-h\mu_t\left(h\right)\right) \sum_{i \leq h} Z_{t,i} p_t^{i:h}}. \tag{7}$$

Merk op dat bovenstaande definitie impliceert dat bij het bepalen van de veronderstelde waarde van de verplichtingen, en dus van de stuurvariabele, geen rekening gehouden wordt met de naar verwachting toe te kennen indexaties na tijdstip t, dus met $\mathrm{E}_t \sum_{j=1}^{h-1} y_{t+j}$. Dit is ook in het huidige pensioencontract het geval ten gevolge van het gebruik van staffels.

Alle in deze notitie te beschouwen stuurvariabelen zullen een autoregressief process van orde 1 volgen. Meer precies krijgen we

$$\log \frac{S_{t+1}}{\bar{S}} - \mu = \rho \left(\log \frac{S_t}{\bar{S}} - \mu \right) + \varepsilon_{t+1}, \tag{8}$$

$$y_t = \frac{1}{N} \log \frac{S_t}{\bar{S}}, \tag{9}$$

waarin ρ en μ nader te bepalen coëfficienten zijn en ε_t onafhankelijk en identiek normaal verdeelde storingen zijn, met verwachting nul en variantie σ_ε^2.

3 De veronderstellingen

Marktconsistente waardering van risicovolle toezeggingen kan gebaseerd worden op verschillende methoden, zoals risk neutral pricing, discontering tegen een marktconsistente disconteringsvoet of het gebruik van een stochastic discount factor (zie Cochrane, 2005). Deze drie methoden zijn gebaseerd op identieke veronderstellingen en leiden tot identieke resultaten. Ongeacht de gehanteerde methode zijn veronderstellingen nodig over het gedrag van financiële markten. Afhankelijk van de aard van het financiële product zijn veelal subjectieve veronderstellingen nodig over parameters in het model, zoals de risicopremie op aandelen of de correlatie tussen rendementen op verschillende financiële titels. In dit document veronderstellen we dat er sprake is van drie risicofactoren: rente, aandelenrisico en langlevenrisico. Langlevenrisico wordt verondersteld niet geprijsd te zijn. Rente en aandelenrisico wordt gemodelleerd met behulp van, respectievelijk, de modellen van Black en Black-Scholes. Hiermee sluiten we aan bij standaard duration analyse voor wat betreft de vastrentende activa. We maken geen expliciete veronderstellingen over eventuele (stochastische) inflatie. Alle (waarde)grootheden in dit document kunnen zowel nominaal als reëel geïnnterpreteerd worden.

Een formele beschrijving van de financiele markt is als volgt. De rente schokken Δr_{t+1}, de aandelenschokken e_{t+1} en de langlevenschokken α_{t+1} worden verondersteld gezamenlijk normaal verdeeld te zijn:

$$\begin{bmatrix} e_{t+1} \\ \Delta r_{t+1} \\ \alpha_{t+1} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} \right). \tag{10}$$

Rendementen op aandelen worden gegeven door

$$R_{t+1} = \exp \left(r_t + \eta_S \sigma_e - \frac{1}{2} \sigma_e^2 + e_{t+1} \right), \tag{11}$$

waarbij $\eta_S\sigma_e$de risico premie op aandelen is. We kiezen voor deze notatie omdat dan apart in beeld te brengen is wat het effect is van meer of minder aandelen volatiliteit en wat van een hoger of lagere prijs van aandelenrisico. Merk tenslotte op dat aandelen- en renteschokken onafhankelijk verondersteld worden.

Prijzen in deze financiële markt worden bepaald door de zogenaamde pricing kernel. Deze pricing kernel specificeren we, conform de modellen van Black en Black-Scholes. De (log)return van de pricing kernel is dan

$$m_{t+1} = -r_t - \eta_S \frac{e_{t+1}}{\sigma_e} - \frac{1}{2}\eta_S^2 - \eta_r \frac{\Delta r_{t+1}}{\sigma_r} - \frac{1}{2}\eta_r^2. \tag{12}$$

Voor wat betrefft langlevenrisico veronderstellen we het volgende. Geef met $p_t^{i:h}$ de overlevingskans, op tijdstip t, van leeftijdscohort i over een horizon h weer. We nemen aan dat de dynamiek in deze sterftekansen wordt gegeven door $p_{t+1}^{i-1:h-1} = \exp(\alpha_{t+1})\, p_t^{i:h}$ waarin α_t cohort onafhankelijke, identiek en onafhankelijk normaal verdeelde, schokken zijn.

4 Dynamiek van de stuurvariabele

Het is evident dat het risicoprofiel van toekomstige pensioenbetalingen afhangt van het beleggings- en vereveningsbeleid van het pensioenfonds. We bepalen de marktconsistente waarde van pensioentoezeggingen zonder dat een beroep wordt gedaan op toekomstige premieinkomsten.

De dynamiek van de stuurvariabele wordt in de teller bepaald door de dynamiek van de activa van het fonds, op hun beurt bepaald door het beleggingsbeleid en ontwikkelingen op de financiële markten. In de noemer is de dynamiek van de veronderstelde waarde van de verplichtingen van belang. We beschouwen beiden apart.

4.1 Dynamiek van de activa A_t

Voor wat betreft de activa, veronderstellen we dat het fonds, op tijdstip t, een fractie w_t van het vermogen in aandelen belegt en de fractie $1 - w_t$ in vastrentende waarden met een duration van D_{At}. Dat leidt er toe dat de waarde van de activa op tijdstip $t+1$ gegeven worden door

$$A_{t+1} = \left(A_t - \sum_{i\leq 0} Z_{ti}\right) \exp\left(r_t + w_t\left[\eta_S\sigma_e - \frac{1}{2}\sigma_e^2 + e_{t+1}\right] - (1-w_t)\, D_{At}\Delta r_{t+1}\right).$$

Merk op dat deze specificatie een (beperkte) onderschatting van het rendement geeft omdat de termijnpremie voor de vastrentende waarde niet meegenomen is. Deze kan, in concrete implementaties, eventueel meegenomen worden in de prijs van aandelenrisico η_S.

4.2 Dynamiek van de veronderstelde verplichtingen V_t

Zoals hierboven beschreven gaan we uit van een stuurvariabele die gebaseerd is op een waardering van de verplichtingen met, vooralsnog, arbitrair gekozen discontovoeten. In het bijzonder zijn deze dus niet noodzakelijk marktconform. Deze veronderstelde waarde van de verplichtingen op tijdstip $t+1$, V_{t+1} verschilt van die op tijdstip t om de volgende redenen.

1. De pensioenbetalingen in jaar t, dus $\sum_{i\leq 0} Z_{ti}$, drukken niet meer op de verplichtingen;

2. Alle rechten $Z_{t+1,i}$ zijn aangepast met de factor $\exp(y_t)$;

3. De toekomstige pensioenbetalingen dienen een periode eerder uitbetaald te worden;

4. De veronderstelde discontovoeten $\theta_{t+1}(h)$ verschillen van die op tijdstip t omdat de rente r_t gewijzigd is.

De gevolgen van de eerste effecten kunnen exact berekend worden. Voor de wijziging in de discontovoeten zelf maken we gebruik van een duration analyse benadering.

De veronderstelde waarde van de pensioenverplichtingen op tijdstip t wordt gegeven door

$$V_t = \sum_{h\geq 0} \exp(-h\theta_t(h)) \sum_{i\leq h} Z_{t,i} p_t^{i:h} \tag{13}$$

Definieer verder de veronderstelde duration van de verplichtingen als

$$D_{Vt} = \sum_{h\geq 0} h \frac{\exp(-h\theta_t(h)) \sum_{i\leq h} Z_{t,i} p_t^{i:h}}{V_t}. \tag{14}$$

Afzien van de wijziging in de discontovoeten (dat wil zeggen gebruikmakend van de veronderstelde discontovoeten $\theta_t(h+1)$) leidt dit tot een veronderstelde waarde van de verplichtingen op tijdstip $t+1$ ter grootte van

$$\begin{aligned}
&\sum_{h\geq 0} \exp(-h\theta_t(h+1)) \sum_{i\leq h} Z_{t+1,i} p_{t+1}^{i:h} \\
&= \exp(y_t) \sum_{h\geq 0} \exp\left(-h\tilde{\theta}_t(h+1)\right) \sum_{i\leq h} Z_{t,i+1} p_{t+1}^{i:h} \\
&= \exp(y_t) \sum_{h\geq 0} \exp\left(-h\tilde{\theta}_t(h+1)\right) \sum_{i\leq h+1} Z_{t,i} p_{t+1}^{i-1:h} \\
&= \exp(y_t) \sum_{h\geq 1} \exp(-(h-1)\theta_t(h)) \sum_{i\leq h} Z_{t,i} p_{t+1}^{i-1:h-1} \\
&= \exp(y_t+\alpha_{t+1}) \sum_{h\geq 1} \exp\left(\theta_t(h) - h\tilde{\theta}_t(h)\right) \sum_{i\leq h} Z_{t,i} p_t^{i:h}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\approx \exp\left(y_t+\alpha_{t+1}+\theta_t\left(D_{Vt}\right)\right)\sum_{h\geq 1}\exp\left(-h\tilde{\theta}_t\left(h\right)\right)\sum_{i\leq h}Z_{t,i}p_t^{i:h} \\
&= \exp\left(y_t+\alpha_{t+1}+\theta_t\left(D_{Vt}\right)\right)\left[V_t-\sum_{i\leq 0}Z_{ti}\right], \qquad (15)
\end{aligned}
$$

waar de benadering gebaseerd is op duration analyse. Rekening houdens met de wijziging van de discontovoeten komen we tot de volgende ontwikkeling van de veronderstelde verplichtingen.

$$
\begin{aligned}
V_{t+1} &= \sum_{h\geq 0}\exp\left(-h\theta_{t+1}\left(h\right)\right)\sum_{i\leq h}Z_{t+1,i}p_{t+1}^{i:h} \\
&\approx \exp\left(-D_{Vt}\left[\theta_{t+1}\left(D_{Vt}\right)-\theta_t\left(D_{Vt}\right)\right]\right)\sum_{h\geq 0}\exp\left(-h\theta_t\left(h+1\right)\right)\sum_{i\leq h}Z_{t+1,i}p_{t+1}^{i:h} \\
&\approx \exp\left(y_t+\alpha_{t+1}+\theta_t\left(D_{Vt}\right)-D_{Vt}\left[\theta_{t+1}\left(D_{Vt}\right)-\theta_t\left(D_{Vt}\right)\right]\right)\left[V_t-\sum_{i\leq 0}Z_{ti}\right] \\
&\approx \exp\left(y_t+\alpha_{t+1}+\theta_t\left(D_{Vt}\right)-D_{Vt}\theta_0\Delta r_{t+1}\right)\left[V_t-\sum_{i\leq 0}Z_{ti}\right], \qquad (16)
\end{aligned}
$$

waarbij de laatste benadering afziet van het effect van de verandering in de stuurvariabele op de verwachte indexatie. In concrete specificaties is de aanbeveling de accuraatheid van bovenstaande benaderingen door middel van, bijvoorbeeld, simulatie te controleren.

4.3 Dynamiek van de stuurvariabele S_t

Op basis van bovenstaande resultaten vinden we autoregressieve dynamiek voor de stuurvariabele S_t, waarbij de autoregressieve parameter afhangt van de vereveningsperiode. We vinden direct

$$
\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{A_{t+1}}{V_{t+1}} \\
&\approx \frac{\left(A_t-\sum_{i\leq 0}Z_{ti}\right)\exp\left(r_t+w_t\left[\eta_S\sigma_e-\frac{1}{2}\sigma_e^2+e_{t+1}\right]-\left(1-w_t\right)D_{At}\Delta r_{t+1}\right)}{\exp\left(y_t+\alpha_{t+1}+\theta_t\left(D_{Vt}\right)-D_{Vt}\theta_0\Delta r_{t+1}\right)\left[V_t-\sum_{i\leq 0}Z_{ti}\right]} \\
&= \frac{A_t-\sum_{i\leq 0}Z_{ti}}{V_t-\sum_{i\leq 0}Z_{ti}}\exp\left(-y_t-\alpha_{t+1}+w_te_{t+1}+D_{V-A,t}\Delta r_{t+1}\right) \\
&\quad\times\exp\left(r_t+w_t\left[\eta_S\sigma_e-\frac{1}{2}\sigma_e^2\right]-\theta_t\left(D_{Vt}\right)\right) \\
&= S_t\frac{1-\sum_{i\leq 0}Z_{ti}/A_t}{1-\sum_{i\leq 0}Z_{ti}/V_t}\exp\left(-y_t-\alpha_{t+1}+w_te_{t+1}+D_{V-A,t}\Delta r_{t+1}\right) \\
&\quad\times\exp\left(r_t+w_t\left[\eta_S\sigma_e-\frac{1}{2}\sigma_e^2\right]-\theta_t\left(D_{Vt}\right)\right),
\end{aligned}
$$

waar $D_{V-A,t} = \theta_0 D_{Vt} - (1 - w_t)\, D_{At}$ de veronderstelde duration gap op tijdstip t aangeeft. We roepen in herinnering dat $\sum_{i \le 0} Z_{ti}$ de totale pensioenbetalingen in jaar t zijn.

We vinden hiermee de volgende dynamiek voor de log-stuurvariabele

$$\begin{aligned} \log S_{t+1} &= \log S_t - y_t + \log \frac{1 - \sum_{i \le 0} Z_{ti}/A_t}{1 - \sum_{i \le 0} Z_{ti}/V_t} \\ &\quad - \alpha_{t+1} + w_t e_{t+1} + D_{V-A,t} \Delta r_{t+1} \\ &\quad + (1 - \theta_0)\, r_t - \theta_1 - \theta_2(D_{Vt}, N) + w_t \left[\eta_S \sigma_e - \frac{1}{2} \sigma_e^2 \right]. \end{aligned} \tag{17}$$

We voeren een aantal veronderstellingen in om de analyse analytisch te kunnen voortzetten. Deze zetten we hieronder op een rij.

Allereerst veronderstellen we $\theta_0 = 1$, dat wil zeggen dat de veronderstelde discontovoet gezien wordt als de rente plus een opslag. Hiermee voorkomen we dat de AR(1) dynamiek in de rente zelf, een AR(1) dynamiek voor de stuurvariabele verstoort.

De term $\log \left(1 - \sum_{i \le 0} Z_{ti}/A_t\right) / \left(1 - \sum_{i \le 0} Z_{ti}/V_t\right)$ zullen we in de analyse verder verwaarlozen. Merk op dat deze term exact nul is indien hetzij $\sum_{i \le 0} Z_{ti} = 0$, hetzij $V_t = A_t$. In het algemeen kunnen afschattingen van het type

$$\left| \log \frac{1 - \sum_{i \le 0} Z_{ti}/A_t}{1 - \sum_{i \le 0} Z_{ti}/V_t} \right| \le \frac{2 \sum_{i \le 0} Z_{ti}}{A_t + V_t} \left| \frac{A_t}{V_t} - 1 \right|, \tag{18}$$

gebruikt worden zolang de uit te betalen pensioenen een klein gedeelte van de activa/verplichtingen uitmaken. Via simulatie kan weer worden nagegaan in welke gevallen deze benadering tot meer dan verwaarloosbare afwijkingen in de waardering leidt. Voor "sinking giants" is het zeker van belang de invloed van deze benadering goed te onderzoeken.

Voor het vereveningsmechnisme veronderstellen we $y_t = N^{-1} \log \left(S_t / \bar{S}\right)$. Hiermee blijft de analyse lineair en daarmee analytisch uitvoerbaar.

Tenslotte veronderstellen we een constant beleggingsbeleid in de zin dat de aandelenexposure w_t, de durationgap $D_{V-A,t}$, en de duration van de verplichtingen $D_{V,t}$ gelijk blijft. Dit is niet strikt noodzakelijk om de berekeningen te kunnen uitvoeren, maar vereenvoudigt de situatie aanzienlijk.

Deze aannames invullen levert

$$\begin{aligned} \log \frac{S_{t+1}}{\bar{S}} &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \log \frac{S_t}{\bar{S}} \\ &\quad - \alpha_{t+1} + w e_{t+1} + D_{V-A} \Delta r_{t+1} \\ &\quad - \theta_1 - \theta_2(D_V, N) + w \left[\eta_S \sigma_e - \frac{1}{2} \sigma_e^2 \right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Hieruit volgt dat deze stuurvariabele inderdaad aan de dynamiek (8) voldoet. Meer precies hebben we

$$\rho = 1 - \frac{1}{N}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{t+1} &= \alpha - \alpha_{t+1} + we_{t+1} + D_{V-A}\Delta r_{t+1}, &(21)\\ \mu &= N\left(w\left[\eta_S\sigma_e - \frac{1}{2}\sigma_e^2\right] - \alpha - \theta_1 - \theta_2(D_V, N)\right). &(22)\end{aligned}$$

5 Marktwaarde van de verplichtingen

Voorgaande analyse leidt tot de dynamiek van de stuurvariabele (gebaseerd op een *veronderstelde* waarde van de verplichtingen) en daarmee van de toe te kennen indexaties y_t en dus de pensioenbetalingen Z_{ti}. Indien marktwaardering wordt nagestreefd, bijvoorbeeld met als argument dat pensioenfondsen voor de activa zijde van de balans ook op financiële markten moeten opereren, kan bovenstaande analyse eveneens gebruikt worden. We nemen aan dat de stuurvariabele aan de dynamiek (8) voldoet.

Beschouw nu de toezegging Z_{ti} over een horizon van h jaar. Deze leidt tot een feitelijke pensioenbetaling indien $i \leq h$ ter grootte van, rekening houdend met een overlevingskans $p_t^{i:h}$, $Z_{ti}\exp\left(\sum_{j=0}^{h-1} y_{t+j}\right) p_t^{i:h}$. Merk op dat geldt

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{h-1} y_{t+j} &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{h-1}\left[\mu + \log\frac{S_{t+j}}{\bar{S}} - \mu\right] &(23)\\ &= \frac{h}{N}\mu + \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{h-1}\left[\rho^j\left(\log\frac{S_t}{\bar{S}} - \mu\right) + \sum_{i=1}^{j}\rho^{j-i}\varepsilon_{t+i}\right]\\ &= \frac{h}{N}\mu + \frac{1}{N}\frac{1-\rho^h}{1-\rho}\left(\log\frac{S_t}{\bar{S}} - \mu\right) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=i}^{h-1}\rho^{j-i}\varepsilon_{t+i}\\ &= \frac{h}{N}\mu + \frac{1}{N}\frac{1-\rho^h}{1-\rho}\left(\log\frac{S_t}{\bar{S}} - \mu\right) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{h-1}\frac{1-\rho^{h-i}}{1-\rho}\varepsilon_{t+i}.\end{aligned}$$

Gebruikmakend van de stochastic discount factor voor de financiële markt die we in deze notitie beschouwen, vinden we voor de waarde op tijdstip t van de pensioenbetaling voor huidig cohort i over een horizon $h \geq i$

$$\begin{aligned}&Z_{ti}p_t^{i:h}\mathrm{E}_t\exp\left(\sum_{j=0}^{h-1} y_{t+j} + m_{t+j+1}\right) &(24)\\ &= Z_{ti}p_t^{i:h}\exp\left(\frac{h}{N}\mu + \frac{1}{N}\frac{1-\rho^h}{1-\rho}\left(\log\frac{S_t}{\bar{S}} - \mu\right)\right)\\ &\quad\times \mathrm{E}_t\exp\left(m_{t+h} + \sum_{i=1}^{h-1}\left[\frac{1-\rho^{h-i}}{N(1-\rho)}\varepsilon_{t+i} + m_{t+i}\right]\right)\\ &= Z_{ti}p_t^{i:h}\exp\left(\frac{h}{N}\mu + \frac{1}{N}\frac{1-\rho^h}{1-\rho}\left(\log\frac{S_t}{\bar{S}} - \mu\right)\right)\end{aligned}$$

$$\times \mathrm{E}_t \exp\left(-r_{t+h-1} + \sum_{i=1}^{h-1}\left[\frac{1-\rho^{h-i}}{N(1-\rho)}\varepsilon_{t+i} - r_{t+i-1} - \eta_S\frac{e_{t+i}}{\sigma_e} - \frac{1}{2}\eta_S^2 - \eta_r\frac{\Delta r_{t+i}}{\sigma_r} - \frac{1}{2}\eta_r^2\right]\right)$$

$$= Z_{ti}p_t^{i:h}\exp\left(\frac{h}{N}\mu - hr_t + \frac{1}{N}\frac{1-\rho^h}{1-\rho}\left(\log\frac{S_t}{\bar{S}} - \mu\right)\right)$$

$$\times \mathrm{E}_t \exp\left(\sum_{i=1}^{h-1}\left[\frac{1-\rho^{h-i}}{N(1-\rho)}\varepsilon_{t+i} - (h-i)\,\Delta r_{t+i} - \eta_S\frac{e_{t+i}}{\sigma_e} - \frac{1}{2}\eta_S^2 - \eta_r\frac{\Delta r_{t+i}}{\sigma_r} - \frac{1}{2}\eta_r^2\right]\right)$$

$$= Z_{ti}p_t^{i:h}\exp\left(\frac{h}{N}\mu - hr_t + \frac{1}{N}\frac{1-\rho^h}{1-\rho}\left(\log\frac{S_t}{\bar{S}} - \mu\right) - \frac{h-1}{2}\left(\eta_S^2 + \eta_r^2\right)\right)$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{h-1}\mathrm{Var}\left\{\frac{1-\rho^{h-i}}{N(1-\rho)}\varepsilon_{t+i} - (h-i)\,\Delta r_{t+i} - \eta_S\frac{e_{t+i}}{\sigma_e} - \eta_r\frac{\Delta r_{t+i}}{\sigma_r}\right\}\right).$$

In geval de stuurvariable wordt verkregen door de rechten Z_{ti} te verdisconteren met veronderstelde discontovoeten zoals in hoofdstuk 4, zie (20)-(22), krijgen we meer precies $N(1-\rho) = 1$ en

$$\mathrm{Var}\left\{\frac{1-\rho^{h-i}}{N(1-\rho)}\varepsilon_{t+i} - (h-i)\,\Delta r_{t+i} - \eta_S\frac{e_{t+i}}{\sigma_e} - \eta_r\frac{\Delta r_{t+i}}{\sigma_r}\right\}$$
$$= \left(1-\rho^{h-i}\right)^2\sigma_\alpha^2 + \left(\left(1-\rho^{h-i}\right)D_{V-A} - (h-i) - \frac{\eta_r}{\sigma_r}\right)^2\sigma_r^2$$
$$+ \left(\left(1-\rho^{h-i}\right)w - \frac{\eta_S}{\sigma_e}\right)^2\sigma_e^2. \tag{25}$$

Invullen levert voor de marktwaarde van de verplichtingen

$$Z_{ti}p_t^{i:h}\exp\left(\frac{h}{N}\mu - hr_t + \left(1-\rho^h\right)\left(\log\frac{S_t}{\bar{S}} - \mu\right)\right) \tag{26}$$
$$\times \exp\left(\frac{h-1}{N}\left[-\frac{1}{2}\eta_S^2 - \frac{1}{2}\eta_r^2\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{h-1}\left(1-\rho^{h-i}\right)^2\sigma_\alpha^2\right.$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{h-1}\left(\left(1-\rho^{h-i}\right)D_{V-A} - (h-i) - \frac{\eta_r}{\sigma_r}\right)^2\sigma_r^2$$
$$\left.+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{h-1}\left(\left(1-\rho^{h-i}\right)w - \frac{\eta_S}{\sigma_e}\right)^2\sigma_e^2\right),$$

Merk op dat

$$\sum_{i=1}^{h-1}\left(1-\rho^{h-i}\right) = h - 1 - \frac{\rho-\rho^h}{1-\rho}. \tag{27}$$

Dit invullen levert uiteindelijk voor de marktwaarde van de verplichtingen op tijdstip t, voor cohort i met horizon h (in geval $h \geq i$)

$$Z_{ti}p_t^{i:h}\exp\left(\frac{h}{N}\mu - hr_t(h) + \left(1-\rho^h\right)\left(\log\frac{S_t}{\bar{S}} - \mu\right)\right) \tag{28}$$

$$\times \exp\left(-w\eta_S\sigma_e\left[h-1-\frac{\rho-\rho^h}{1-\rho}\right]-D_{V-A}\sigma_r^2\sum_{i=1}^{h-1}\left(1-\rho^{h-i}\right)\left((h-i)+\frac{\eta_r}{\sigma_r}\right)^2\right.$$
$$+\frac{D_{V-A}^2\sigma_r^2}{2}\sum_{i=1}^{h-1}\left((1-\rho^{h-i})\right)^2$$
$$\left.+\frac{w^2\sigma_e^2}{2}\sum_{i=1}^{h-1}\left(1-\rho^{h-i}\right)^2+\frac{\sigma_\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^{h-1}\left(1-\rho^{h-i}\right)^2\right).$$

De marktconforme discontovoet wordt voor de algemene specificatie van de stuurvariabele dus gegeven door

$$\begin{aligned}\mu_t(h) \quad = \quad & r_t(h)-\left[\frac{\mu}{N}+\frac{1}{h}\left(1-\rho^h\right)\left(\log\frac{S_t}{\bar{S}}-\mu\right)\right] \\ & +w\eta_S\sigma_e\left[1-\frac{1-\rho^h}{h(1-\rho)}\right] \\ & +\frac{D_{V-A}\sigma_r^2}{h}\sum_{i=1}^{h-1}\left(1-\rho^{h-i}\right)\left((h-i)+\frac{\eta_r}{\sigma_r}\right)^2 \\ & -\frac{D_{V-A}^2\sigma_r^2}{2h}\sum_{i=1}^{h-1}\left(1-\rho^{h-i}\right)^2 \\ & -\frac{w^2\sigma_e^2}{2h}\sum_{i=1}^{h-1}\left(1-\rho^{h-i}\right)^2-\frac{\sigma_\alpha^2}{2h}\sum_{i=1}^{h-1}\left(1-\rho^{h-i}\right)^2,\end{aligned} \tag{29}$$

met

$$\mu=N\left(w\left[\eta_S\sigma_e-\frac{1}{2}\sigma_e^2\right]-\alpha-\theta_1-\theta_2(D_V,N)\right). \tag{30}$$

In geval van het gebruik van de marktconsistente dekkingsgraad als stuurvariabele en dus van marktconsistente waardering van de verplichtingen dient uiteraard te gelden $\theta_t(h)=\mu_t(h)$. Als we de veronderstelde disconteringsvoet normaliseren zodat $\theta_2(D_V)=0$ bepaalt dit precies de marktconsistente waarde voor θ_1. Merk op dat het lange termijn gemiddelde μ van $\log S_t/\bar{S}$ in dat geval positief is. Dit leidt tot het ontstaan van een reserve die precies marktconsistent is. Merk op dat μ daalt naarmate het fonds minder risico neemt, dat wil zeggen, als w daalt.

De uitdrukking in (29) specifeert de meetkundige disconteringsvoet, op basis van meetkundig gedefinieerde rendementsparameters, als er sprake is van zowel aandelen-, rente- en langlevenrisico. Als alleen aandelenrisico wordt bezien en gekeken wordt naar het rekenkundig rendement vereenvoudigt de uitdrukking tot

$$\mu(h)=r+w\eta_S\sigma_e\left[1-\frac{1-\rho^h}{h(1-\rho)}\right]. \tag{31}$$

Indien we een fonds met $N=10$ en $D_V=15$ beschouwen, vinden we dat $1-(1-0.9^{15})/15/0.1=47\%$ van de aandelenrisicopremie bij marktconforme waardering van de verplichtingen meegenomen mag worden. Een snellere toedeling van schokken in de vorm van $N = 5$ leidt tot $1 - (1 - 0.8^{15})/15/0.2 = 68\%$.