Network for Studies on Pensions, Aging and Retirement

NETSPAR INDUSTRY SERIES

Herverdelingseffecten van verschillende projectierentes in verbeterde premieregelingen vanuit vermogens per horizon

Johan Bonekamp, Lans Bovenberg, Theo Nijman, Bas Werker

OCCASIONAL-11 / 2016

Achtergrondnotitie:

Herverdelingseffecten van verschillende projectierentes in verbeterde premieregelingen vanuit vermogens per horizon

Johan Bonekamp, Lans Bovenberg, Theo Nijman en Bas Werker

Oktober 2016

1. Inleiding

Dit document bevat een technische beschrijving van het model waarmee de cijfers geproduceerd zijn in de Tabel van het *Onderzoeksrapport: Herverdelingseffecten van verschillende projectierentes in verbeterde premieregelingen*. Dit paper redeneert vanuit vermogens per horizon. Bonekamp e.a. (2016), daarentegen, redeneert vanuit aanspraken. Het is mogelijk om, zie appendix II, te laten zien dat beide benaderingen tot dezelfde pensioenbetalingen leiden.

De rest van het paper is als volgt gestructureerd. Paragraaf 2 bevat een aantal definities. De intergenerationele herverdeling van risico in de huidige periode komt aan de orde in paragraaf 3. Paragraaf 4 breidt deze analyse uit naar risico's in toekomstige perioden. Paragraaf 5 bespreekt intergenerationele herverdeling in een steady-state en laat zien dat ex-ante herverdelingseffecten afhangen van de rente. Deze analyse van ex-ante herverdeling wordt in paragraaf 6 uitgebreid tot een omgeving die niet in steady-state is – overeenkomstig het onderzoeksrapport voor SZW. De eerste appendix beziet het meest algemene geval waarin er ook in de opbouwfase risicodeling plaatsvindt tussen generaties.

2. Definities

We hanteren de volgende definities.

Horizon en generatie

We beschouwen een pensioensysteem waarin generaties worden geïdentificeerd met hun 'leeftijd' $0 \leq j \leq L-1$. Hierin geeft L het moment van overlijden weer. De laatste pensioenbetaling wordt ontvangen een jaar voor overlijden, dus op leeftijd $j = L-1$. We definiëren $V_h^j(t)$ als het vermogen op tijdstip t dat generatie met 'leeftijd' j voor een uitkering op horizon h (met $1 \leq h \leq L-j$) heeft gespaard. Merk op dat we werken met vermogens per horizon in plaats van annuïteitspunten. Hoe we het totale vermogen, $V^0(t) \equiv \sum_{k=1}^{L} V_k^0(t)$, dat een generatie inbrengt op de pensioenleeftijd verdelen over de verschillende horizonnen $1 \leq k \leq L$, hangt af van de actuariële regels. We beginnen met een algemene specificatie en zullen in paragraaf 6 de actuariële regels specificeren.

Het aandeel van het pensioenpotje voor horizon *h* in het totale pensioenvermogen voor de generatie met leeftijd *j* op tijdstip *t* is (met $0 \leq j \leq L-1$ en $1 \leq h \leq L-j$)

$$\alpha_h^j(t) \equiv \frac{V_h^j(t)}{\sum_{k=1}^{L-j} V_k^j(t)} . \qquad (1)$$

De N-duration van de generatie met leeftijd j op tijdstip t is (N is de periode waarover schokken worden uitgesmeerd)

$$U^j(t) \equiv N \sum_{h=1}^{L-j} \alpha_h^j(t)\, q_h , \qquad (2)$$

waar $q_h = \frac{h}{N}$ als $h \leq N$ en $q_h = 1$ als $h \geq N$.

Generaties en toedelingskring

Het totale vermogen noodzakelijk voor alle toekomstige pensioenbetalingen aan generatie j op tijdstip t wordt gegeven door $\sum_{h=1}^{L-j} V_h^j(t)$. De budgetconstraint schrijft voor dat het totale vermogen in de toedelingskring gelijk is aan $V(t) \equiv \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{h=1}^{L-j} V_h^j(t)$. Daarmee kunnen we het vermogensaandeel op tijdstip t van generatie met leeftijd j in het totale vermogen van de toedelingskring schrijven als:

$$\beta^j(t) \equiv \frac{\sum_{h=1}^{L-j} V_h^j(t)}{V(t)} \quad . \qquad (3)$$

Merk op dat $\sum_{j=0}^{L-1} \beta^j(t) = 1$. We definiëren de N-duration van de toedelingskring als geheel op tijdstip t als

$$U(t) \equiv \sum_{j=0}^{L-1} \beta^j(t)\, U^j(t). \qquad (4)$$

Horizon en toedelingskring

We definiëren het vermogensaandeel op tijdstip t voor horizon h in het totale vermogen van de toedelingskring als[1]:

$$\delta_h(t) \equiv \frac{\sum_{j=0}^{L-h} V_h^j(t)}{V(t)} = \frac{\sum_{j=0}^{L-h} V_h^j(t)}{\sum_{k=1}^{L} \sum_{j=1}^{L-k} V_k^j(t)} = \sum_{j=0}^{L-h} \beta^j(t) \alpha_h^j(t) . \qquad (5)$$

Het vermogensaandeel voor horizon h op tijdstip t, $\sum_{j=0}^{L-h} V_h^j(t)$, in het totale vermogen van de toedelingskring, $V(t)$, is het gewogen gemiddelde van de vermogensaandelen voor horizon h van de generatie met leeftijd j, $\alpha_h^j(t)$, waarbij de gewichten de vermogensaandelen $\beta^j(t)$ zijn van generatie met leeftijd j in het totale vermogen $V(t)$.

Merk op dat (3) en (5) direct impliceren

[1] De laatste gelijkheid volgt uit $V(t) \equiv \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{h=1}^{L-j} V_h^j(t) = \sum_{h=1}^{L} \sum_{j=0}^{L-h} V_h^j(t)$ (namelijk het omdraaien van de sommaties over horizonnen en de generaties), tezamen met vergelijking (1) en (4).

$$\beta^j(t) = \sum_{h=1}^{L-j} \delta_h(t) \left(\frac{V_h^j(t)}{\sum_{j=0}^{L-h} V_h^j(t)} \right), \qquad (6)$$

waarbij de term aan de rechterkant in de ronde haken staat voor het vermogensaandeel van generatie met leeftijd j in het totale vermogen in de toedelingskring dat gereserveerd is voor horizon[2] $1 \leq h \leq L - j$ op tijdstip t.

We kunnen de *N*-duration van de toedelingskring als geheel ook schrijven als

$$U(t) = N \sum_{h=1}^{L} \delta_h(t)\, q_h \qquad (7)$$

Immers, vervang in vergelijking (7) $\delta_h(t)$ door vergelijking (5) en gebruik vervolgens vergelijking (2) en (4).

De *N*-duration van de solidariteitskring kunnen we dus schrijven als de gewogen som van de *N*-duration van de generaties (zie vergelijking (4)) of als gewogen som van de *N*-duration van de horizonnen (zie vergelijking (7)).

3. Herverdeling over horizonnen en generaties door schokken op tijdstip t

Om de marktwaarde van pensioentoezeggingen per horizon te berekenen zijn meerdere methoden beschikbaar. In Bonekamp e.a. (2016) wordt de risiconeutrale verwachting van de verdisconteerde pensioenbetalingen vergeleken met de in rekening gebrachte premie. In het huidige document bepalen we de netto subsidie door het verschil tussen de in rekening gebrachte risicopremie en de premie van het feitelijk aan de deelnemer toegekende risico. Beide methoden leiden tot dezelfde resultaten, zie appendix II. In het bijzonder wordt in beide methoden afgezien van een precieze berekening van de tijdsafhankelijkheid in de toeslagen die ontstaan als gevolg van het collectieve toedelingsmechanisme. Naar verwachting heeft dit geen gevolgen voor de orde van grootte van de gevonden herverdelingseffecten.

Horizonnen
De netto subsidie[3] op horizon h, $S_h(t)$, wordt gegeven[4] door

$$S_h(t) = \theta_h(t) - \frac{N q_h}{U(t)} \theta(t), \qquad (8)$$

waar $\theta_h(t)$ de (risico)opslag (op de risicovrije rente) in de projectierente is voor horizon h op tijdstip t. $\theta(t)$ is de gemiddelde (risico)opslag voor de toedelingskring als geheel op tijdstip t, ofwel:

---

[2] Immers, de maximale horizon voor een generatie van leeftijd j is $L - j$.

[3] De tekst suggereert alsof de budgetrestrictie, zie vergelijking (12) en vergelijking (14), wordt afgeleid vanuit de actuariële regels, zie vergelijking (8). In feite is het andersom: we leiden vergelijking (8) af van de budgetrestrictie.

[4] De (netto) subsidie wordt gegeven als percentage van de waarde van het vermogen gereserveerd voor horizon h. Deze kan dus geïnterpreteerd worden als een extra rendement op het vermogen gereserveerd voor horizon h. Voor een afleiding van deze vergelijking, zie Bovenberg (2016).

$$\theta(t) \equiv \sum_{h=1}^{L} \delta_h(t)\, \theta_h(t). \qquad (9)$$

Merk op dat $S_h(t) = 0$ voor alle h wanneer geldt dat $\frac{\theta_h(t)}{\theta_k(t)} = \frac{q_h}{q_k}$.[5]

Tevens is het mogelijk om de gemiddelde (risico)opslag te definiëren voor de generatie met leeftijd j op tijdstip t

$$\theta^j(t) \equiv \sum_{k=1}^{L-j} \alpha_k^j(t)\, \theta_k(t), \qquad (10)$$

zodat ook geldt[6]

$$\theta(t) = \sum_{j=0}^{L-1} \beta^j(t)\, \theta^j(t)\,. \qquad (11)$$

Overeenkomstig de *N*-duration van de toedelingskring, $U(t)$, kunnen we de gemiddelde (risico)opslag van de kring, $\theta(t)$, op twee manieren definiëren: als de gewogen som van de horizonnen, zie vergelijking (9), of als gewogen som van de generaties, zie vergelijking (11).

Merk op dat geldt dat

$$\sum_{h=1}^{L} \delta_h(t)\, S_h(t) = 0, \qquad (12)$$

deze budgetrestrictie volgt uit[7] de substitutie van vergelijking (8) waarna we gebruik maken van vergelijking (7) en (9). Het rendement op de portefeuille wordt dus geheel verdeeld over de vermogens. Er is dus geen derde partij die bijstort, ofwel er is sprake van een harde budget restrictie. Vergelijking (12) kunnen we interpreteren als de definitie van een omslagstelsel.

Generaties
Het is mogelijk om de subsidies (en belastingen) als gevolg van schokken in periode t ook per generatie uit te rekenen[8]

$$S^j(t) \equiv \sum_{k=1}^{L-j} \alpha_k^j(t) S_k(t) = \theta^j(t) - \frac{U^j(t)}{U(t)} \theta(t). \qquad (13)$$

Uiteraard geldt ook[9]

---

[5] Deel vergelijking (8) door $\theta(t)$ en merk op dat $\frac{\theta_h(t)}{\theta(t)} = \frac{N q_h}{U(t)}$.

[6] Substitueer vergelijking (5) in vergelijking (9) om $\delta_h(t)$ te elimineren en draai vervolgens de sommaties over de horizonnen en generaties om, en gebruik tenslotte vergelijking (10).

[7] Zie voetnoot 3.

[8] De gelijkheid volgt uit substitutie van vergelijking (8) in de definitie van $S^j(t)$ om $S_k(t)$ te elimineren; vervolgens benutten we de definities van $\theta^j(t)$, zie vergelijking (10), en $U^j(t)$, zie vergelijking (2).

[9] Deze gelijkheid volgt uit substitutie van vergelijking (13) om $S^j(t)$ te elimineren, waarna we gebruik maken vergelijking (5) en (11).

$$\sum_{j=0}^{L-1} \beta^j(t) S^j(t) = 0. \qquad (14)$$

De schokken worden verdeeld over alle generaties die meedoen. We kunnen (14) zien als de budgetrestrictie voor de bestaande generaties. Er is bij huidige schokken sprake van herverdeling tussen bestaande generaties. Toekomstige generaties doen niet mee in het delen van huidige schokken. Er is sprake van een omslagstelsel.

4. Ex-ante herverdeling over generaties bij schokken op verschillende tijdstippen

Voor de nieuw intredende generatie ($j = 0$ voor $t + n$ met $n \geq 0$) bepalen de actuariële regels hoe het door deze generatie ingebrachte vermogen $V^0(t+n)$ verdeeld wordt over de horizonnen waarbij aan de budgetrestrictie $V^0(t+n) = \sum_{k=1}^{L} V_k^0(t+n)$ voldaan moet zijn[10]. Verder veronderstellen we in dit document een vlakke rentetermijnstructuur.

De update regel voor de waarde van de vermogens van de oudere generaties die reeds gepensioneerd zijn, is gedefinieerd als

$$V_{h-1}^{j+1}(t+1) = V_h^j(t)\big(1 + r + S_h(t)\big). \qquad (15)$$

Met de initiële conditie $V_h^0(t)$ en het recursief toepassen van vergelijking (15) vinden we (voor $1 \leq j \leq L-1$ en $1 \leq h \leq L-j$) dat

$$V_h^j(t+j) = V_{h+j}^0(t) \prod_{k=1}^{j} \Big(1 + r + S_{h+j-k+1}(t+k-1)\Big). \qquad (16)$$

Voor de contante waarde van vermogens van de overlevende generaties ($j < L$) geldt:

$$\hat{V}_{h-1}^{j+1}(t+1) = \hat{V}_h^j(t) \frac{\big(1 + r + S_h(t)\big)}{(1+r)} \qquad (17)$$

Met de initiële conditie $\hat{V}_h^0(t) = V_h^0(t)$ en het recursief toepassen van (17) vinden we (voor $1 \leq j \leq L-1$ en $1 \leq h \leq L-j$)

$$\hat{V}_h^j(t+j) = V_{h+j}^0(t) \prod_{k=1}^{j} \frac{\Big(1 + r + S_{h+j-k+1}(t+k-1)\Big)}{(1+r)} \qquad (18)$$

Voor de ex-ante welvaartseffecten bezien we schokken op alle toekomstige tijdstippen die een generatie meemaakt die op tijdstip *t* toetreedt (en dan dus de 'leeftijd' 0 heeft)

$$W^0(t) = \sum_{j=0}^{L-1} \hat{\alpha}_{j+1}^0(t+j) S^j(t+j). \qquad (19)$$

[10] Hierbij nemen we (impliciet) aan dat het individu zijn vermogen op een tijdstip verdeeld over alle horizonnen. In het onderzoeksrapport zijn we uitgegaan van geleidelijke toetreding, zie hiervoor Appendix I.

Hierbij staat $\hat{\alpha}^0_{j+1}(t+j)$ voor het deel van het originele vermogen van de generatie die op tijdstip t toetreedt welke getroffen wordt door schokken op tijdstip $t+j$.[11] Merk op dat $\hat{\alpha}^0_1(t)=1$, omdat op tijdstip t het hele vermogen van een nieuw toetredende generatie bloot staat aan schokken.

Voor $j>0$ hebben we voor het aandeel van het resterende vermogen op tijdstip $t+j$ van de generatie die op tijdstip t is gepensioneerd (en dus op tijdstip t de 'leeftijd' heeft van 0) in het originele vermogen van de betreffende generatie $V^0(t)$:

$$\hat{\alpha}^0_{j+1}(t+j) \equiv \frac{\sum_{k=1}^{L-j} \hat{V}_k^j(t+j)}{\sum_{k=1}^{L} V_k^0(t)} = \frac{\sum_{k=1}^{L-j} V_{k+j}^0(t) \prod_{n=1}^{j} \left(\frac{\left(1+r+S_{j+1-n}(t+n-1)\right)}{(1+r)} \right)}{V^0(t)}. \qquad (20)$$

5. Steady-state met algemene formulering opslag en herverdeling

We bezien nu de situatie van een steady-state waarin de leeftijdssamenstelling en (risico)opslagen onafhankelijk zijn van de tijd. Merk op dat we hier nog geen specifieke actuariële veronderstellingen maken over het verloop van de termijnstructuur van de (risico)opslagen θ_h en de sterftecijfers m_h[12].

De enige vergelijkingen die we nodig hebben zijn de steady-state versies van de budgetrestrictie, vergelijking (14), en de waarde effecten, vergelijking (19):

$$\sum_{j=0}^{L-1} \beta^j S^j = 0, \qquad (21)$$

$$W^0 = \sum_{j=0}^{L-1} \hat{\alpha}^0_{j+1} S^j \qquad (22)$$

met (de steady-state versies van vergelijking (4) en (20))

$$\beta^j \equiv \frac{\sum_{k=1}^{L-j} V_k^j}{\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{k=1}^{L-i} V_k^i}, \qquad (23)$$

$$\hat{\alpha}^0_{j+1} \equiv \frac{\sum_{k=1}^{L-j} \hat{V}_k^j}{\sum_{k=1}^{L} V_k^0}. \qquad (24)$$

---

[11] Ofwel, als de op tijdstip t toetredende generatie (die op dat tijdstip dus de 'leeftijd' 0 heeft) de 'leeftijd' heeft van j.

[12] m_h is gedefinieerd als de een-jaar sterftekans in periode h onder de veronderstelling dat het individu nog leeft in periode $h-1$.

Merk op dat geldt:

$$\frac{\beta^j}{\hat{\alpha}_{j+1}^0} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{L-j} V_k^j}{\sum_{k=1}^{L-j} \hat{V}_k^j}\right)\left(\frac{\sum_{k=1}^{L} V_k^0}{\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{k=1}^{L-i} V_k^i}\right) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{L-j} \hat{V}_k^j \left(\prod_{h=k+1}^{k+j}(1+r)\right)}{\sum_{k=1}^{L-j} \hat{V}_k^j}\right)\left(\frac{\sum_{k=1}^{L} V_k^0}{\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{k=1}^{L-i} V_k^i}\right), \qquad (25)$$

Hierbij gebruiken we in de tweede gelijkheid[13]

$$\frac{V_k^j}{\hat{V}_k^j} = \prod_{h=k+1}^{k+j}(1+r). \qquad (26)$$

Merk op dat het ex-ante effect van de steady-state generatie, W^0, nul is als de risicovrije rente nul is (dat wil zeggen $r = 0$ voor alle $h \geq 1$). Dan geldt dat $V_k^j = \hat{V}_k^j$ (zie vergelijking (26)) waardoor $\beta^j / \hat{\alpha}_{j+1}^0$ onafhankelijk is van j (zie vergelijking (25)). In dat geval impliceert vergelijking (21) dat $W^0 = 0$. Intuïtief gezien is met een risicovrije rente van 0 de tijdswaarde nul. Dit impliceert dat herverdeling tussen generaties (die optellen tot 0) geen effect heeft. Het maakt dan namelijk niet uit of je middelen eerder krijgt (als er herverdeling is naar jongeren) of later (als er herverdeling is naar ouderen).

Dit resultaat is onafhankelijk van de specificatie van de (risico)opslag en de aard van de herverdeling tussen leeftijden (dat wil zeggen hoe S^j varieert over leeftijden). Het is een algemeen resultaat voor omslagsystemen in steady-state.

6. Horizonafhankelijke en horizononafhankelijke opslagen buiten steady-state

Geen herverdeling over horizonnen

Een tweede situatie waarin de herverdeling 0 is, betreft een situatie met $S_h(t) = 0$ voor alle $h \geq 1$. In dit geval is de herverdeling *op elke horizon* zelfs 0. Bovendien hoeft er geen sprake te zijn van een steady-state. Zoals we gezien hebben in paragraaf 2 geldt dit als $\frac{\theta_h(t)}{\theta_k(t)} = \frac{q_h}{q_k}$. In dat geval is de verdeling van het risico (dat wil zeggen de afslagen als gevolg van risicovrij beleggen bij het bepalen van de marktwaarde) gelijk aan de verdeling van de beloning voor risico (in termen van lagere prijs voor de aankoop van de variabele annuïteit).

Horizononafhankelijke (risico)opslag

Deze paragraaf beziet ook het geval waarin de (risico) opslag niet afhankelijk is van de horizon. In dat geval geven vergelijking (13) en vergelijking (8):

$$S^j(t) = \left(\frac{U(t) - U^j(t)}{U(t)}\right)\theta(t), \qquad (27)$$

$$S_h(t) = \left(\frac{U(t) - Nq_h}{U(t)}\right)\theta(t). \qquad (28)$$

De herverdeling hangt af van hoe de *N*-duration van de generatie of horizon zich verhoudt tot de gemiddelde *N*-duration in de toedelingskring. Als er sprake is van spreiding is er sprake van herverdeling van jongeren naar ouderen. Jongeren krijgen wel risico maar worden niet beloond (in termen van een hogere risico opslag bij aankoop).

[13] Deel vergelijking (16) door vergelijking (18) en herschrijf.

Geen ex-ante herverdeling met een horizononafhankelijke (risico)opslag
In drie bijzondere situaties is er ook in dit geval met een horizon-onafhankelijke (risico)opslag geen ex-ante herverdeling.

Geen spreiding
De eerste situatie is als er geen sprake is van spreiding ($N = 1$). In dat geval is de *N*-duration voor de toedelingskring en elke horizon gelijk aan 1. Er is dan geen sprake van intergenerationele herverdeling en ook niet van herverdeling tussen horizonnen (ofwel, $S_h(t) = 0$).

Korte levensduur
Het tweede speciale geval is als er maar één generatie is vanwege $L = 1$. Men leeft maar één periode tijdens het pensioen. De solidariteitskring bestaat maar uit één generatie.

Individuele risicotoedeling
Een derde speciaal geval is als de solidariteitskring maar één generatie bevat. In dat geval is er wel herverdeling tussen horizonnen ($S_h(t) \neq 0$) maar niet tussen generaties ($S^j(t) = 0$).

Alhoewel deze speciale gevallen extreem lijken geven ze wel inzicht. Hoe meer spreiding van schokken en hoe groter de heterogeniteit (in termen van leeftijd en horizonnen) in de solidariteitskring, hoe groter de ex-ante herverdeling als gevolg van een horizononafhankelijke (risico)opslag.

Appendix I: Ex-ante herverdelingseffecten met opbouwfase

Deze sectie beschrijft welke stappen worden genomen om de ex-ante herverdeling te bepalen voor generaties die al tijdens de opbouwfase toetreden tot een toedelingskring (geleidelijke toetreding). Op tijdstip t treedt een generatie (met leeftijd 0) voor het eerst toe tot de collectieve toedelingskring. Na $P-1$ perioden (op pensioenleeftijd $P-1$) op tijdstip (de pensioendatum) $t+P-1$ heeft het individu al zijn pensioenvermogen ondergebracht in het fonds; op tijdstip $t+P$ (en op leeftijd P) ontvangt hij voor het eerst een uitkering.

Opbouwfase naast uitkeringsfase

Voor het pensioenvermogen ondergebracht in de solidariteitskring gebruiken we de notatie $V_k^j(t)$, waarbij j de 'leeftijd' is op tijdstip t. We meten de leeftijd vanaf het moment dat de deelnemer voor het eerst zijn gespaarde pensioenvermogen inlegt in de toedelingskring. Op dat moment heeft hij leeftijd 0. De 'opbouwfase' in de toedelingskring is vanaf leeftijd 0 tot en met leeftijd $P-1$. De 'uitkeringsfase' duurt vanaf leeftijd P tot en met leeftijd $L+P-1$. Voor een individu met leeftijd j zijn de horizonnen k waarvoor deze agent spaart (en waarvoor hij potjes heeft in de toedelingskring) $\max(P-j,1) \leq k \leq L+P-j-1$.

Oude situatie zonder opbouwfase speciaal geval

Voor $P=1$ hebben we de situatie terug waarin de deelnemer in één keer toetreedt tot het fonds op pensioendatum (zoals beschreven in de hoofdtekst).

Opbouwfase

In opbouwfase twee soorten pensioenvermogen

We noteren het totale vermogen dat de generatie met leeftijd j op tijdstip t heeft gespaard maar nog niet heeft ingelegd in de toedelingskring $\tilde{V}^j(t)$. Verder is $V^j(t)$ het vermogen dat generatie met leeftijd j heeft ingelegd in de solidariteitskring. Het totale pensioenvermogen van generatie met leeftijd j is dus $\tilde{V}^j(t)+V^j(t)$. Merk op dat op leeftijd $j \geq P-1$ al het vermogen in de solidariteitskring zit (dat wil zeggen $\tilde{V}^j(t)=0$) maar dat op leeftijd $j<0$ juist al het pensioenvermogen buiten de toedelingskring is belegd (ofwel, $V^j(t)=0$).

Premie-inleg

In de actieve levensjaren tussen leeftijd 0 en $P-1$ kan de deelnemer ook nog premie inleggen in zijn gespaarde vermogen dat nog niet is ingelegd in de toedelingskring. We noteren de premie van een deelnemer met leeftijd $0 \leq j \leq P-1$ op tijdstip t met $C^j(t)$.

Tijdsevenredige inleg

Het omzetten van vermogen buiten de solidariteitskring naar vermogen in de solidariteitskring op tijdstip t geschiedt op leeftijd $0 \leq j \leq P-1$ via

$$\Delta V^j(t) = \frac{\tilde{V}^j(t)+C^j(t)}{P-j} , \qquad \text{(AI. 1)}$$

met $\Delta V^j(t)$ de nieuwe inleg in de solidariteitskring. Verder ontwikkeld $\tilde{V}^j(t)$ zich via

$$\tilde{V}^{j+1}(t+1) = \left(\tilde{V}^{j}(t) + C^{j}(t)\right)\left(1 - \frac{1}{P-j}\right)(1+r)\,, \qquad (\text{AI}.2)$$

met initiële condities

$$V^{-1}(t) = 0. \qquad (\text{AI}.3)$$

en exogeen beginvermogen $\tilde{V}^{0}(t)$.

Merk op dat voor $P = 1$ en $j = 0$ (het oude geval zonder expliciete opbouwfase en dus $C^{0}(t) = 0$) geldt dat

$$\Delta V^{0}(t) = \tilde{V}^{0}(t).$$

Indien al het vermogen in de actieve fase direct in de solidariteitskring zou gaan (dat wil zeggen $\tilde{V}^{j}(t) = 0$), in plaats van (A.1) geldt:

$$\Delta V^{j}(t) = C^{j}(t). \qquad (\text{AI}.1')$$

Actuariële regels voor verdeling over horizonnen
Het nieuwe vermogen in de solidariteitskring $\Delta V^{j}(t)$ van generatie met leeftijd $0 \le j \le P-1$ op tijdstip t wordt als volgt belegd over verschillende horizonnen:

$$\Delta V_k^{j}(t) = \frac{\dfrac{\Delta V^{j}(t)}{(1+d)^k(1+r+\theta)^k} * \prod_{h=j+1}^{k}(1-m_h)}{\sum_{i=\max(P-j;1)}^{L+P-j}\dfrac{1}{(1+d)^i(1+r+\theta)^i} * \prod_{h=j+1}^{i}(1-m_h)}. \qquad (\text{AI}.4)$$

Merk op dat voor $j \le P-1$ we nog steeds in de opbouwfase zitten en de lengte van de uitkeringsfase waarvoor geld wordt gereserveerd de maximale lengte van P heeft. Voor horizonnen $1 \le k \le P - 1 - j$ en $k \ge L + P - j$ geldt dat $V_k^{j}(t) = 0$. d is gedefinieerd als de jaarlijkse daling. Voor $d > 0$ daalt de uitkering jaarlijks[14] met d%. Verder kan er sterfte zijn in de jaren voordat de eerste uitkering plaatsvindt (dat wil zeggen $m_h > 0$ voor $j \le h < P$). Merk ook op dat in vergelijking (A.4) zowel de (risico)opslag, θ, als de risicovrije rente, r, constant zijn over zowel de horizonnen als de tijd.

De ‘update-regel’ voor de waarde van vermogens van generaties die *nog geen* uitkering ontvangen is dan als volgt gedefinieerd $0 \le j < P-1$ en $P - j \le h \le L + P - j - 1$

$$V_{h-1}^{j+1}(t+1) = V_h^{j}(t)\left(1 + r + S_h(t)\right) + \Delta V_{h-1}^{j+1}(t). \qquad (\text{AI}.5)$$

De ‘update-regel’ voor de waarde van vermogen van de oudere generaties die *al* een uitkering ontvangen is overeenkomstig met vergelijking (A.5). Voor hen is echter $\Delta V_{h-1}^{j+1}(t) = 0$, want er is geen nieuwe inleg $\Delta V^{j}(t)$ als $j > P-1$).

Waarde-effecten
Voor de waarde-effecten geldt (zowel in opbouwfase, als in uitkeringsfase)

$$\hat{V}_{h-1}^{j+1}(t+1) = V_{h-1}^{j+1}(t+1)(1+r)^{-(j+1)} \qquad (\text{AI}.6)$$

[14] In het onderzoeksrapport gaan we uit van $d = 0$.

omdat we alles contant maken naar tijdstip 0.

We meten alle waarde-effecten ten opzichte van het totale pensioenvermogen op leeftijd 0, inclusief de verdisconteerde toekomstige premieopbrengsten (hierbij gaan we ervanuit dat deze premies zeker zijn; we bepalen de waarde onder $\mathbb{Q}$):

$$\widehat{W}^0 \equiv \tilde{V}^0(t) + \sum_{k=0}^{P-1} \frac{C^k(t)}{(1+r)^k}. \qquad (\mathrm{AI}.7)$$

De ex-ante herverdeling wordt gegeven door

$$W^0(t) = \sum_{j=0}^{L+P-1} \hat{\alpha}_{j+1}^0(t+j) S^j(t+j), \qquad (\mathrm{AI}.8)$$

met

$$\hat{\alpha}_{j+1}^0(t+j) \equiv \frac{\sum_{k=\max(P-j;1)}^{L+P-1-j} \widehat{V}_k^j(t+j)}{\widehat{W}^0}. \qquad (\mathrm{AI}.9)$$

Merk op dat de ondergrens van k ook als 1 geschreven kan worden want voor horizonnen $1 \leq k \leq P-j$ geldt $\widehat{V}_k^j(t+j) = 0$, zodat ook geldt

$$\hat{\alpha}_{j+1}^0(t+j) \equiv \frac{\sum_{k=1}^{L+P-1-j} \widehat{V}_k^j(t+j)}{\widehat{W}^0}. \qquad (\mathrm{AI}.9')$$

Appendix II: overeenkomst update regel hoofdtekst en Bonekamp e.a. (2016)

In deze appendix laten we zien dat bij een gegeven horizononafhankelijke projectierente, p, en een gegeven horizononafhankelijke risico vrije rente, r de update regel in de hoofdtekst en Bonekamp e.a. (2016) overeenkomstig zijn. Ten behoeve van de leesbaarheid tonen we deze overeenkomstigheid aan voor het geval *zonder* geleidelijke toetreding en *met* deterministische sterfte. Het resultaat blijft gelden wanneer we deze laatste twee aannames loslaten.

De update regel[15] in Bonekamp e.a. (2016) is als volgt gedefinieerd (zie vergelijking[16] W2):

$$A_{t+1}(h) = A_t(h+1)P_t(1)[1 + q(h+1)\alpha_{t+1}], \qquad (\text{AII}.1)$$

Het vermenigvuldigen van vergelijking (AII.1) met $1/(1+p)^h$ en daar vervolgens de verwachting onder Q te nemen leidt tot

$$\frac{A_{t+1}(h)}{(1+p)^h} = \frac{A_t(h+1)}{(1+p)^h}\left[1 + q(h+1)\,E_t^Q\alpha_{t+1}\right], \qquad (\text{AII}.2)$$

met, zie vergelijking B6,

$$E_t^Q\alpha_{t+1} = \frac{r-p}{1+p}\frac{\sum_{h\geq 1} A_t(h)(1+p)^{-h}}{\sum_{h\geq 1} A_t(h)q(h)(1+p)^{-h}} = \left(\frac{1+r}{1+p} - 1\right)\left(\frac{N}{U(t)}\right). \qquad (\text{AII}.3)$$

Hierbij is in de tweede gelijkheid gebruik gemaakt van de notatie uit de hoofdtekst.

De update regel in de hoofdtekst is gedefinieerd als (zie vergelijking B15)

$$V_h^{j+1}(t+1) = V_{h+1}^{j}(t)\big(1 + r + S_{h+1}(t)\big) \qquad (\text{AII}.4)$$

waar, zie vergelijking B28[17],

$$S_{h+1}(t) = \left(\frac{U(t) - Nq_{h+1}}{U(t)}\right)(p-r) = \left(1 - \frac{Nq_{h+1}}{U(t)}\right)(p-r) = (r-p)\left(\frac{Nq_{h+1}}{U(t)} - 1\right). \qquad (\text{AII}.4a)$$

Om de aanspraken in Bonekamp e.a. (2016) te koppelen aan de vermogens in de hoofdtekst nemen we aan dat de volgende twee relaties[18] gelden:

$$\frac{A_{t+1}(h)}{(1+p)^h} = \sum_{j=0}^{L-1} V_h^{j+1}(t+1) \qquad (\text{AII}.5)$$

---

[15] Tenzij expliciet gespecificeerd, is de notatie in deze sectie overeenkomstig met de notatie en interpretatie van Bonekamp e.a. (2016) of de hoofdtekst.

[16] De “W” (“B”) in vergelijking W2 (B15) wordt gebruikt om aan te geven dat het vergelijking (2) in Bonekamp e.a. (2016), respectievelijk de hoofdtekst, betreft.

[17] Hier gebruiken we dat $\theta = p - r$.

[18] Merk op dat we hier impliciet gebruiken dat als $V_{h+1}^{j}(t)$ niet bestaat voor bepaalde generaties/horizonnen dat de “waarde” gelijk is aan nul. Een tweede opties is om, overeenkomstig de hoofdtekst, de sommatie van vergelijking (AII.5) te begrenzen. Hier is ten behoeve van de leesbaarheid voor de eerste optie gekozen.

$$\frac{A_t(h+1)}{(1+p)^{h+1}} = \sum_{j=0}^{L-1} V_{h+1}^{j}(t) \qquad (\mathrm{AII.6})$$

Gebruikmakende van (AII.2), (AII.5) en (AII.6) is het mogelijk om aan te tonen dat

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{L-1} V_h^{j+1}(t+1) &= \frac{A_{t+1}(h)}{(1+p)^h} = \frac{A_t(h+1)}{(1+p)^h}\left[1+q(h+1)\,E_t^Q \alpha_{t+1}\right] \\ &= \frac{A_t(h+1)}{(1+p)^h}\left(\frac{1+p}{1+p}\right)\left[1+q(h+1)\,E_t^Q \alpha_{t+1}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{L-1} V_{h+1}^{j}(t)\,(1+p)\left[1+q(h+1)\,E_t^Q \alpha_{t+1}\right]. \qquad (\mathrm{AII.7})\end{aligned}$$

Om de overeenkomst tussen de update-regel in het huidige document en Bonekamp e.a. (2016) te laten gelden is het noodzakelijk dat geldt:

$$(1+p)\left[1+q(h+1)\,E_t^Q \alpha_{t+1}\right] = \left(1+r+S_{h+1}(t)\right). \qquad (\mathrm{AII.8})$$

Invullen van (AII.4a) in rechterkant van de vergelijking in (AII.8) en herschrijven geeft:

$$\begin{aligned}\left(1+r+S_{h+1}(t)\right) &= 1+r+(r-p)\left(\frac{Nq_{h+1}}{U(t)}-1\right) = \left(\frac{Nq_{h+1}}{U(t)}\right)(r-p)+(1+p) \\ &= (1+p)\left(\left(\frac{Nq_{h+1}}{U(t)}\right)\frac{r-p}{1+p}+1\right), \qquad (\mathrm{AII.8}a)\end{aligned}$$

en het invullen van (AII.3) in de linkerkant[19] van vergelijking (AII.8) en herschrijven leidt tot:

$$\begin{aligned}(1+p)\left[1+q_{h+1}E_t^Q \alpha_{t+1}\right] &= (1+p)\left(1+q_{h+1}\left(\frac{1+r}{1+p}-1\right)\left(\frac{N}{U(t)}\right)\right) \\ &= (1+p)\left(1+\left(\frac{1+r}{1+p}-1\right)\left(\frac{Nq_{h+1}}{U(t)}\right)\right) = (1+p)\left(1+\frac{r-p}{1+p}\left(\frac{Nq_{h+1}}{U(t)}\right)\right) \\ &= (1+p)\left(\left(\frac{Nq_{h+1}}{U(t)}\right)\frac{r-p}{1+p}+1\right). \qquad (\mathrm{AII.8}b)\end{aligned}$$

wat overeenkomstig is met (AII.8a). Ofwel, vergelijking (AII.8) geldt. Loslaten van het sommeren over de generaties leidt tot de volgende versimpeling van (AII.7)

$$V_h^{j+1}(t+1) = V_{h+1}^{j}(t)(1+p)\left[1+q(h+1)\,E_t^Q \alpha_{t+1}\right]. \qquad (\mathrm{AII.9})$$

Invullen van (AII.8) in (AII.9) leidt tot vergelijking (AII.4) waarmee de equivalentie tussen de update regel van de hoofdtekst en Bonekamp e.a. (2016) is aangetoond.

[19] Hierbij gebruiken we dat $q(h+1) = q_{h+1}$.

Referentielijst

Bovenberg, A.L., J.L.M. Bonekamp, Th. E.. Nijman en B. J.M. Werker (2016). Welke vaste dalingen en welk beleggingsbeleid passen bij gewenste uitkeringsprofiel in verbeterde premieregelingen?

Bonekamp, J.L.M., A.L. Bovenberg, Th. E. Nijman en B. J.M. Werker (2016). Achtergrondnotitie: Herverdelingseffecten van verschillende projectierentes in verbeterde premieregelingen vanuit aanspraken.